UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE DO PARANÁ
***Campus* Cornélio Procópio**

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO

REBECCA LOURENÇO

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: PRODUÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA À LUZ DA ABORDAGEM HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICA

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR
2018

REBECCA LOURENÇO

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: PRODUÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA À LUZ DA ABORDAGEM HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Orientador: Prof. Dr. William Júnior do Nascimento
Coorientadora: Profª. Dra. Simone Luccas

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR
2018

Ficha catalográfica elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UENP

L293 Rebsf

Lourenço, Rebecca
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: PRODUÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA À LUZ DA ABORDAGEM HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICA / Rebecca Lourenço; orientador William Júnior do Nascimento; co orientadora Simone Luccas - Cornélio Procópio, 2018.
209 p. :il.

Dissertação (Mestrado em Ensino) - Universidade Estadual do Norte do Paraná, Centro de Ciências Humanas e da Educação, Programa de Pós-Graduação em Ensino, 2018.

1. Funções Trigonométricas. 2. Abordagem Histórico Epistemológica. 3. Aprendizagem Significativa. 4. Sequência Didática. I. Júnior do Nascimento, William, orient. II. Luccas, Simone, co-orient. III. Título.

REBECCA LOURENÇO

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: PRODUÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA À LUZ DA ABORDAGEM HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Após realização de Defesa Pública o trabalho foi considerado:

APROVADO

BANCA EXAMINADORA

____
Orientador: Prof. Dr. William Júnior do Nascimento
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

____
Coorientadora: Profª. Dra. Simone Luccas
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

____
Profª. Dra. Helenara Sampaio
Universidade Norte do Paraná - UNOPAR

____
Profª. Dra. Marlize Spagolla Bernardelli
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

Cornélio Procópio, 22 de fevereiro de 2018.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, a razão de tudo em minha vida. Obrigado por sempre se fazer presente como meu melhor amigo, conselheiro e Pai. O Senhor é a minha fortaleza, minha alegria constante e meu amor inabalável, a Ti toda honra.

Agradeço a minha família que sempre me apoiou e acreditou em mim, e me desculpem pelas ausências. Dedico a vocês a minha eterna gratidão e amor.

Ao meu namorado Fábio Rezende da Silva e sua família, pela compreensão e carinho. Amo vocês.

Aos meus queridos orientadores, professor Dr. William Junior do Nascimento obrigado por suas contribuições minuciosas e grandiosas, e, professora Drª. Simone Luccas, você é inspiração para mim desde a graduação, obrigado por me auxíliar nesta caminhada. Enfim, obrigado por todo conhecimento compartilhado e pelas horas e horas de estudos e dedicação, vocês com certeza contribuíram para meu crescimento profissional, e, além disso, meu crescimento pessoal. A vocês dedico minha admiração e gratidão.

Agradeço aos meus amigos, alunos regulares da primeira turma do PPGEN-UENP (2016), uma turma sem dúvidas singular, meu muito obrigado pelas contribuições e momentos de desabafos. Em especial a minha querida amiga professora Me. Silvane Mazzur, companheira de estrada, em que pudemos compartilhar de momentos valiosos. Amo todos vocês.

As professoras Drª. Marlize Spagolla Bernardelli e Drª. Helenara Regina Sampaio Figueiredo que compõem a banca. É uma honra tê-las, vocês são admiráveis.

As professoras Me. Mariany Layne Souza e Me. Claudia Francisco Pelati Teixeira pelas valiosas contribuições na validação do Produto Educacional desta pesquisa.

Aos professores Dr. Lucken Bueno Lucas, Dr. João Coelho Neto, Drª. Letícia Jovelina Storto, Drª. Priscila Caroza Frasson Costa, que contribuíram com minha formação como pesquisadora.

Agradeço ao Colégio Estadual Durval Ramos Filhos – Andirá por abrir as portas para o desenvolvimento da pesquisa, em especial a professora Elisângela Madoglio Izidoro e aos alunos do 3ºB (2017), vocês foram fundamentais.

Em especial, agradeço pela vida do meu avô Antônio Lourenço e da minha querida Charlotte, na qual nesta caminhada tivemos que nos despedir para sempre, a saudade ainda dói, mas o amor que ficou não mudou. Vocês sempre ficaram em meu coração. Amo vocês.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram diretamente ou indiretamente para a realização deste trabalho. Que Deus abençoe abundantemente cada um.

Lembre-se da minha ordem:”Seja forte e corajoso! Não fique desanimado, nem tenha medo, porque Eu, o Senhor, seu Deus, estarei com você em qualquer lugar para onde você for!” (JOSUÉ1:9)

LOURENÇO, Rebecca. **Funções Trigonométricas**: produção de uma sequência didática potencialmente significativa à luz da abordagem histórico-epistemológica. 2018. 209 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino) – Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procópio, 2018.

RESUMO

De acordo com nossas experiências, antes como alunos e hoje como professores e pesquisadores, podemos evidenciar que na Educação Básica é bastante comum os conteúdos matemáticos serem ensinados sem uma fundamentação que explique sua origem. Ao estudar sua origem podemos compreender a necessidade que levou o conteúdo a ser desenvolvido e identificar quais suas possíveis aplicações. Com a falta dessa compreensão os alunos demonstram desinteresse em estudar Matemática, na qual, consequentemente, aprendem de forma decorada apenas para a realização de provas. Neste sentido, algumas abordagens metodológicas de ensino são utilizadas com o intuito de oferecer mais sentido ou significado ao conhecimento que se ensina. Assim, este trabalho buscou proporcionar uma aprendizagem significativa do conteúdo de Funções Trigonométricas, segundo a abordagem metodológica de ensino Histórico-Epistemológica associada a Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel. Para tal, foram consideradas quatro fases fundamentais: a elaboração de uma fundamentação teórica, os encaminhamentos metodológicos adequados, a produção de um Produto Educacional, a Sequência Didática Potencialmente Significativa, e a análise dos dados oriundos do Produto Educacional. Aplicada para alunos de 3º ano do Ensino Médio em um colégio estadual no norte do Paraná, verificamos que o produto educacional possibilitou aos alunos compreender as origens do conhecimento, os porquês de estudá-lo e a relação entre as situações de aplicação na antiguidade e atualidade, resultando em aulas mais dinâmicas, de modo que o professor assumiu papel de mediador e orientador durante a aprendizagem dos alunos, e os alunos assumiram o papel principal, construtores do seu próprio conhecimento. Ademais, as respostas satisfatórias se sobressaíram em relação as respostas insatisfatórias, o que evidência uma aprendizagem significativa dos alunos. Por fim, considerando que o produto educacional desta pesquisa foi elaborado de forma que pudesse ser viável sua utilização em sala de aula, foram definidos objetivos a serem alcançados por cada questão de cada atividade da Sequência Didática Potencialmente Significativa, além de orientações para sua a aplicação.

Palavras-chave: Funções Trigonométricas; Abordagem Histórico-Epistemológica; Aprendizagem Significativa; Sequência Didática.

LOURENÇO, Rebecca. **Trigonometric Functions:** production of a potentially significant didactic sequence in light of the historical-epistemological approach. 2018. 209 sheets. Dissertation - Graduation Program in Teaching (Professional Master in Teaching) – Universidade Estadual do Norte do Paraná – Campus de Cornélio Procópio, 2018.

ABSTRACT

According to our experiences, before as students and today as teachers and researchers, we can show that in Basic Education it is quite common for mathematical contents to be taught without a foundation that explains their origin. By studying its origin we can understand the need that led to the content to be developed and identify what its possible applications. With the lack of this understanding, students show a lack of interest in studying Mathematics, in which they consequently learn in a way that is decorated only for the taking of tests. In this sense, some methodological approaches of teaching are used with the intention of offering more meaning or meaning to the knowledge that is taught. Thus, this work sought to provide a meaningful learning of the content of Trigonometric Functions, according to the methodological approach of Historical-Epistemological teaching associated with Ausubel's Significant Learning Theory. For this, four fundamental phases were considered: the elaboration of a theoretical foundation, the adequate methodological referrals, the production of an Educational Product, the Potentially Significant Didactic Sequence, and the analysis of the data from the Educational Product. Applied to 3rd year high school students at a state college in the north of Paraná, we verified that the educational product enabled the students to understand the origins of knowledge, the reasons for studying it and the relation between the application situations in antiquity and actuality , resulting in more dynamic classes, so that the teacher assumed the role of mediator and mentor during the students' learning, and the students took on the leading role, builders of their own knowledge. In addition, the satisfactory answers stood out in relation to the unsatisfactory answers, which evidences a significant learning of the students. Finally, considering that the educational product of this research was elaborated in such a way that its use in the classroom could be viable, it was defined goals to be achieved by each question of each activity of the Potentially Significant Didactic Sequence, besides orientations for its application.

Key words: Trigonometric Functions; Historical-Epistemological Approach; Meaningful Learning; Following teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ATD	Análise Textual Discursiva
SD	Sequência Didática
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao pensarmos a respeito de possíveis aplicações para ensinar Matemática por meio do nosso cotidiano, devemos reavivar estudos que povos antigos realizaram, pois, ao perceber o motivo pela qual os levaram a desenvolver determinados conhecimentos podemos compreender que muito do conhecimento foi desenvolvido a partir de situações do cotidiano, a fim de solucionar problemas de ordem prática, sendo esta uma herança cultural relevante para o estudo da Matemática.

Embora seja essencial essa herança, muitas vezes, passa despercebida pelo ensino do conhecimento científico, dando margem a uma aprendizagem com poucos significados. De acordo com nossas experiências, antes como alunos e hoje como professores e pesquisadores, podemos evidenciar que na Educação Básica é bastante comum os conteúdos matemáticos serem ensinados sem uma fundamentação que explique sua origem, a necessidade que levou ao seu desenvolvimento e suas possíveis aplicações. Isso resulta na falta de compreensão dos alunos e desinteresse em estudar Matemática, consequentemente, aprendem de forma decorada apenas para a realização de provas.

Na tentativa de amenizar esse quadro, algumas abordagens metodológicas de ensino são utilizadas com o intuito de oferecer mais sentido ou significado ao conhecimento que se ensina. Dentre as abordagens metodológicas na área da Matemática, este trabalho adota a abordagem histórico-epistemológica, na qual evidência não somente a ampliação dos conceitos, mas, sobretudo como foi construído.

A partir desta abordagem, este trabalho apresenta uma reconstrução histórico-epistemológica a respeito das Funções Trigonométricas. Percorrendo diversos períodos e civilizações, procuramos identificar os objetos de estudos essenciais desse conhecimento e como eram realizados os cálculos, para assim identificar como se desenvolveu a Trigonometria resultando na forma que conhecemos atualmente.

Ao considerar que o conteúdo das Funções Trigonométricas é apontado pelas Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008), como parte dos conteúdos básicos do Ensino Médio, pensamos em uma proposta pedagógica que pudesse apresentar de maneira mais significativa os conhecimentos desenvolvidos ao longo da reconstrução histórica. Nesse sentido, elaboramos a construção e aplicação de uma Sequência Didática Potencialmente Significativa para alunos do 3º ano do Ensino Médio.

O referencial teórico que norteou a elaboração desta Sequência Didática Potencialmente Significativa foi Zabala (2010) que a estruturou, a abordagem histórico-epistemológica com a construção do conhecimento trigonométrico e a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel que destacamos elementos considerados fundamentais para que ocorra uma aprendizagem significativa das Funções Trigonométricas por meio de um material potencialmente significativo.

Nesse sentido este trabalho busca compreender se: *a abordagem metodológica de ensino Histórico-Epistemológica pode contribuir efetivamente para uma aprendizagem significativa de alunos do Ensino Médio, no que tange ao ensino das Funções Trigonométricas*? Levando em consideração a problemática deste trabalho, foi realizada uma revisão sistemática em banco de teses e dissertações da CAPES, em Periódicos de Qualis (A1, A2 e B1), a saber: Bolema, Ciência e Educação, Investigação em Ensino de Ciências, Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências, Educação Matemática e Pesquisa, REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática e ZETETIKE, nos últimos dez anos. Podemos constatar que poucos trabalhos envolvem a História da Matemática a respeito das Funções Trigonométricas.

Frente essa problemática, o objetivo geral deste trabalho é **investigar a elaboração de uma Sequência Didática Potencialmente Significativa, segundo a abordagem metodológica de ensino Histórico-Epistemológica das Funções Trigonométricas, com vistas a promover a aprendizagem significativa dos alunos do Ensino Médio**. A partir do objetivo geral, os objetivos específicos foram delineados como:

- Desenvolver uma reconstrução histórico-epistemológica das Funções Trigonométricas;
- Elaborar uma Sequência Didática Potencialmente Significativa segundo a abordagem metodológica de ensino Histórico-Epistemológica;
- Aplicar a Sequência Didática Potencialmente Significativa para alunos de Ensino Médio;

- Analisar os dados oriundos da aplicação à luz de critérios presentes na Teoria da Aprendizagem Significativa e abordagem Histórico-Epistemológica.

Para que se cumpram os objetivos propostos, este trabalho é estruturado em capítulos, a saber:

- **Capítulo 1:** apresentação da fundamentação teórica, a qual envolve a abordagem histórico-epistemológica referente à Trigonometria e a Teoria da Aprendizagem Significativa.
- **Capítulo 2:** apresentação dos encaminhamentos metodológicos com o objetivo de nortear e proporcionar subsídios para a realização deste trabalho. Deste modo, este capítulo se apresenta em quatro diferentes abordagens metodológicas, a saber: abordagem metodológica de pesquisa (definida por pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico); abordagem metodológica de Ensino (ancorada no ensino Histórico-Epistemológico); abordagem metodológica de desenvolvimento da Sequência Didática (referenciada em Zabala (2010)) e abordagem metodológica de análise de dados (de acordo com a Análise Textual Discursiva de Moraes e Galiazzi (2014)).
- **Capítulo 3:** apresentação do produto educacional referente a este trabalho, com os objetivos propostos para cada questão e orientações para professores da Educação Básica que se interesse em aplicar o mesmo.
- **Capítulo 4:** análise dos dados coletados durante aplicação da Sequência Didática Potencialmente Significativa com os respectivos resultados obtidos. Utilizando-se da Análise Textual Discursiva, foram expostos excertos dos alunos de acordo com as categorias, subcategorias e unidades de análise, bem como análises reflexivas elaboradas pelos pesquisadores.
- **Considerações Finais:** reflexões a respeito de todo o trabalho realizado.

A seguir, iniciamos com a Fundamentação Teórica assumida por esta pesquisa.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O referencial teórico que sustenta este trabalho é fundamentado no uso da História da Matemática e Epistemologia, para realização de uma reconstrução histórica do conteúdo de Funções Trigonométricas, e como também a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel que vem proporcionar subsídios que evidenciem a ocorrência de uma aprendizagem significativa dos alunos.

1.1 Uso da História da Matemática e Epistemologia

A História da Matemática vem se consolidando durante os últimos trinta anos como uma área de conhecimento e investigação em Educação Matemática (LOPES, ALVES 2014). Documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998) e as Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008) reconhecem a História da Matemática como uma tendência metodológica eficiente de ensino para nortear a prática dos professores. Ao considerá-la como metodologia de ensino e fazer uso em sala de aula, o professor pode adquirir ferramentas para mostrar o porquê de estudar determinados conteúdos, podendo promover aulas mais dinâmicas e interessantes (LOPES, FERREIRA, 2013).

Segundo com D'Ambrosio (1999) as práticas educativas se fundam na cultura, estilos de aprendizagem e tradições e a história compreende registro desses fundamentos, portanto é difícil compreender a Matemática sem estudar sua história, cujas raízes estão diretamente ligadas à História da humanidade.

> Desvincular a matemática das outras atividades humanas é um dos maiores erros que se pratica particularmente na educação da matemática. Em toda a evolução da humanidade, as ideias matemáticas vêm definindo estratégia de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumento para esse fim e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para própria existência (D'AMBRÓSIO, 1999, p.97).

A própria História da Matemática nos revela que essa Ciência foi desenvolvida a partir de problemas de ordem prática, intimamente ligado à cultura dos povos, visto que não se desenvolveu de forma isolada ao longo dos tempos.

Seu desenvolvimento se deu por meio de problemas relativos às necessidades e preocupações de povos com finalidade a responder questões de diferentes origens e contextos, revelando a Matemática como uma criação humana e abrangente a outras áreas do conhecimento como: música, acústica, eletricidade e mecânica (OLIVEIRA, 2013). Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) orientam que a História da Matemática, como um recurso em sala de aula, pode contribuir para a construção de um olhar mais crítico aos objetos de conhecimento (BRASIL, 1998).

Considerando a Matemática como uma ciência, Matthews (1995) elenca alguns porquês da história da ciência contribuir para o ensino, destacando alguns: "motiva e atrai os alunos; humaniza a matéria; promove uma compreensão melhor dos conceitos científicos por traçar seu desenvolvimento e aperfeiçoamento (...)" (p.172).

Ao utilizar a História da Matemática na escola, Fried (2001) relaciona várias maneiras de como introduzir, considerando, de forma geral, duas maneiras básicas:

> 1. Estratégia de Adição: na qual há introdução de anedotas históricas, pequenas biografias, problemas isolados. Não altera o currículo, somente o alarga. É uma estratégia passiva, na qual os professores mostram a seus alunos pequenas ilustrações de matemáticos.
> 2. Estratégia de Acomodação ou Ajuste: na qual ocorre o desenvolvimento histórico na explicação de uma técnica, ou ideia, ou organização dos assuntos de uma matéria de acordo com um esquema teórico (FRIED, 2001, p. 392 apud LUCCAS, 2004, p. 22).

Miguel (1993) ao citar a História da Matemática em sua obra "Três estudos sobre história e educação matemática" lista várias vantagens que a História da Matemática pode contribuir, a saber:

> 1. Uma fonte de motivação para o ensino (História-Motivação);
> 2. Uma fonte de seleção de objetivos para o ensino-aprendizagem (História-Objetivo);
> 3. Uma fonte de métodos adequados de ensino-aprendizagem (História-Método);
> 4. Uma fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos ou recreativos a serem incorporados de maneira episódica nas aulas de matemática (História-Recreação);

> 5. Um instrumento que possibilita a desmistificação da Matemática e a desalienação de seu ensino (História-Desmistificação);
> 6. Um instrumento na formalização de conceitos matemáticos (História-Formalização);
> 7. Um instrumento para a constituição de um pensamento independente e crítico (História-Dialética);
> 8. Um instrumento unificador dos vários campos da Matemática (História-Unificação);
> 9. Um instrumento promotor de atitudes e valores (História-Axiologia);
> 10. Um instrumento de conscientização epistemológica (História-Conscientização);
> 11. Um instrumento de promoção da aprendizagem significativa e compreensiva (História-Significação);
> 12. Um instrumento de resgate da identidade cultural (História-Cultura);
> 13. Um instrumento revelador da natureza da Matemática (História-Epistemologia) (p.106 - 107).

Dentre as vantagens elencadas acima, neste trabalho enfatizamos a "história-epistemologia", caracterizada como um instrumento revelador da natureza da Matemática. A palavra é composta com *episteme* que significa "conhecimento cientifico" e *logos* que significa "estudo", portanto, epistemologia é o estudo do conhecimento científico (MIGUEL 1993; MACIEL 2017). Ao fazer uso da Epistemologia no ensino e aprendizagem, Pinheiro (2016) destaca:

> No entanto, é por meio da Filosofia, mais especificamente da Epistemologia, que se abrem as portas para a reflexão das estruturas do conhecimento, seja do aluno, do professor ou quaisquer outros envolvidos do processo de ensino e aprendizagem das Ciências. (PINHEIRO, 2016, p.29)

Lucas (2010) nos revela quais as contribuições ao utilizar a Epistemologia:

> No que se refere às contribuições da Epistemologia, pensamos que favorecer análises epistemológicas corretas de conceitos, no domínio do ensino de Ciências, pode ajudar na transposição das barreiras da contradição e da falta de significado que podem levar muitos estudantes ao não entendimento de assuntos científicos. (LUCAS, 2010, p.27)

A partir dessas considerações, a proposta é apresentar uma reconstrução histórica com este trabalho, de acordo com Luccas (2004, p.28):

> Tal reconstrução histórica propicia o acesso ao contexto dos problemas com os quais os matemáticos estavam envolvidos ao desenvolverem seus trabalhos, o que permite uma aproximação do raciocínio do aprendiz com o raciocínio do matemático no seu ato criativo.

Portanto, fundamentada na História da Matemática e na Epistemologia, com esta reconstrução histórica pretende-se compreender de que modo se deu o desenvolvimento dos conceitos e das estruturas atinentes as Funções Trigonométricas, de forma que o aluno possa compreender o processo de construção do conhecimento e refletir sobre o mesmo. No próximo tópico será apresentada a reconstrução histórica a respeito das Funções Trigonométricas.

1.2 RECONSTRUÇÃO HISTÓRICA

Esta reconstrução histórico-epistemológica das Funções Trigonométricas tem como objetivo levar o leitor a compreender o desenvolvimento do conhecimento desde sua criação até seu estágio atual, sua composição estrutural, articulação com demais conhecimentos, assim como sua funcionalidade para solucionar problemas. Diante disto, foi percorrido um caminho histórico para realização da reconstrução.

No que tange à Trigonometria, nos primórdios da história os gregos, hindus e árabes fizeram significativas contribuições que foram consolidadas séculos depois pelos europeus. Neste trajeto procurou-se identificar os objetos de estudos essenciais desse conhecimento e como eram realizados os cálculos para assim identificar como se desenvolveu a Trigonometria resultando na forma que conhecemos hoje, por triângulos retângulos e Funções Trigonométricas.

1.2.1 O Início da Trigonometria

A Trigonometria esteve presente no desenvolvimento matemático de diversos povos desde os primórdios das civilizações mais antigas. O termo Trigonometria surgiu somente em 1595, pelo matemático, astrônomo e teólogo Pitiscus (1561-1613), mas historicamente, por vários séculos, seus estudos estavam inseridos na área de Geometria, área de estudo que se desenvolveu de acordo com necessidades práticas, utilizada também para contar, medir e desenhar (BOYER, 2012; BERLINGHOFF, GOUVÊA, 2012).

Estudos trigonométricos tiveram seus primeiros indícios registrados em rudimentos históricos tanto no Egito quanto na Babilônia datados 3000 a.C. e na China em aproximadamente 1110 a.C. (MENDES, 1997; COSTA, 1997). Obras importantes como o papiro Cairo (3000 a.C.) e papiro Rhind (1650 a.C.) evidenciam que os antigos já possuíam conhecimento a respeito dos ângulos, relações trigonométricas e triângulos retângulos, de modo que os aplicavam em diversos contextos como: construção de pirâmides, medição de sombras do *gnômon* (relógio do Sol) para determinar horas do dia, cobranças de impostos para plantio de terras férteis nas margens de rios, divisão de terras, cálculos astronômicos, entre outros (EVES, 2011).

Seguindo os egípcios, no Oriente Antigo, os gregos contribuíram para um desenvolvimento significativo na Matemática e na Trigonometria. Diante do racionalismo crescente, muito dos conhecimentos se desenvolveram de forma a responder questões do tipo "*como*" e "*por quê*", tendo em vista que a visão estática das coisas tornou-se insustentável (BOYER, 2012). A Grécia foi berço de muitos conhecimentos a respeito da trigonometria, lugar em que diversos pensadores marcaram significativamente a História da Matemática, tais como: Tales e Pitágoras, ambos por volta do século VI a.C..

De acordo com a História, dentre os conhecimentos desenvolvidos por esses pensadores gregos, destacam-se a semelhança de triângulos definida a partir do Teorema de Tales e a relação entre lados de um triângulo retângulo consolidado por Pitágoras (VI a.C.), ficando conhecida como Teorema de Pitágoras. Contudo, de acordo com o historiador Boyer (2012), essa sistematização já era de conhecimento dos babilônios e dos egípcios. Logo, estes conhecimentos marcaram historicamente o início da Trigonometria com forte caráter geométrico (BOYER, 2012).

1.2.2 O Desenvolvimento das Relações Seno e Cosseno

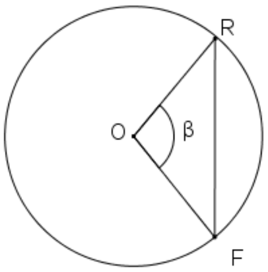
Neste tópico serão abordadas as relações seno e cosseno, visto que ambas se desenvolveram concomitantemente em um contexto astronômico baseado em estudos geométricos.

1.2.2.1 A geometria das tabelas de cordas

Historicamente, a Matemática ficou marcada por ser muito utilizada em cálculos na Astronomia. Os gregos dedicavam-se a estes estudos, pois queriam compreender as posições dos astros, como a Terra e o Sol se moviam, distâncias entre Terra, Sol e Lua, entre outros. Para isto, utilizavam de métodos geométricos, como as tabelas de cordas, também conhecidas como tabelas trigonométricas (PEREIRA, MOREY, 2015).

Neste contexto, o termo corda representa o segmento de reta que une dois pontos extremos de um arco do círculo (KENNEDY, 1992), conforme representado na Figura 1 pelo segmento $\overline{RF}$.

Figura 1 - Representação do comprimento da corda no círculo.



Fonte: Adaptado de Boyer (2012)

Os cálculos sobre cordas eram obtidos por meio de círculos que eram considerados objetos de estudo desde a antiguidade. Para isto, Hiparco (140 a.C.) generalizou o trabalho de Hipsicles (240-170 a.C.) sobre a divisão do zodíaco em 360 partes para a divisão em 360 partes de qualquer círculo, sendo ele o primeiro grego a utilizar unidade de medida graus (NASCIMENTO, 2005).

A primeira tabela de cordas feita por Hiparco, por volta de 150 a.C., em uma obra composta por doze livros, tratava do cálculo de comprimento de cordas de um arco de círculo arbitrário (PEREIRA, MOREY, 2015). Entretanto, a tabela de cordas construída por Hiparco desapareceu e não foi possível identificar como foi construída, mas, posteriormente baseado em estudos de Hiparco, Claudio Ptolomeu (127-150 d.C) realizou um importante trabalho grego sobre Astronomia denominado *Syntaxis Mathemática* (Coleção matemática). Este trabalho foi considerado pelos árabes a maior obra já existente até a época, ficando conhecida como *Almagesto* (Al Magest = A maior), na qual possuía a primeira tabela trigonométrica que chegou até os dias atuais (EVES, 2011; PEREIRA, MOREY 2015).

No Almagesto, Ptolomeu se baseou em métodos geométricos considerando o círculo e seus elementos, e assim construiu a tabelas de cordas a fim de facilitar os cálculos astronômicos. Baseado em Hiparco, dividiu em 360 partes o círculo, representado atualmente por 360º (trezentos e sessenta graus), o diâmetro em 120 partes e cada parte em 60 porções, representado atualmente por 60' (sessenta minutos) e as 60 porções dividiu novamente por 60, representado atualmente por 60'' (sessenta segundos), considerando o raio igual a 60. Essas divisões podem se justificar pelo fato dos gregos utilizarem a base sexagesimal dos babilônios (KENNEDY, 1992; KLINE, 1972; PEREIRA, MOREY, 2015).

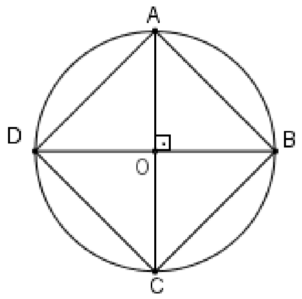
Para a construção das tabelas de cordas, Ptolomeu considerou um círculo e relacionou o arco central com o comprimento da corda, em que no Almagesto era representado por crd (segmento $\overline{RF}$ na Figura 1). Utilizando da geometria euclidiana e com base em um raio de 60 unidades, calculou o comprimento das cordas (crd).

Pereira e Morey (2015) relatam como Ptolomeu construiu as tabelas de cordas:

> Para a construção dessas tabelas, Ptolomeu utilizou o cálculo das cordas de alguns ângulos, identificando-as por meio dos lados de polígonos regulares inscritos como, por exemplo: $crd\,36°$ é o lado de um decágono inscrito; $crd\,60°$ é o lado do hexágono inscrito; $crd\,72°$ é o lado do pentágono inscrito; $crd\,90°$ é o lado de um quadrado inscrito; $crd\,120°$ é o lado do triangulo equilátero inscrito. Para isso, ele apresenta a construção desses polígonos e a determinação do comprimento do lado desses polígonos (PEREIRA; MOREY, 2015. p. 145).

Tomando como exemplo o $crd\,90°$, constrói-se um quadrado $ABCD$ inscrito no círculo, como na Figura 2.

Figura 2 - Comprimento da corda de um ângulo de 90º.



Fonte: Os autores (2018).

Na Figura 2 observa-se que o quadrado $ABCD$ corresponde a quatro triângulos retângulos inscritos. Para encontrar o comprimento da corda basta considerar um triângulo retângulo e aplicar o teorema de Pitágoras, pois por meio dele é possível encontrar valores dos lados de um triângulo, consequentemente o lado que representa o comprimento da corda. No triângulo AOB os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$ são os raios do círculo representado por r e o segmento $\overline{AB}$ o comprimento da corda que se deseja encontrar (MENDES, 1997). Aplicando o teorema de Pitágoras encontra-se o comprimento da corda $\overline{AB}$:

$$hipotenusa^2 = cateto^2 + cateto^2$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{A0}^2 + \overline{BO}^2$$

$$(crd\ 90º)^2 = r^2 + r^2$$

$$crd\ 90º = r\sqrt{2}$$

Como Ptolomeu considerava raio igual a 60 unidades, o valor numérico para $crd\,90°$ encontrado na tabela de cordas elaborada por ele é de $84^{p}32'03''$ (BERLINGHOFF, GOUVÊA, 2012; SCOTT,1969), número este representado na notação sexagesimal. Ao passar para o sistema decimal esse número é representado por $84 + \frac{32}{60} + \frac{03}{60}$, que é igual a 84,583...

Para calcular outros ângulos, Ptolomeu utilizou de deduções geométricas a partir de cálculos sobre a corda da soma de dois arcos, a corda do arco-metade e a corda da diferença de dois arcos, utilizando para isto além do símbolo crd, o símbolo $\overline{crd}$ que representava comprimento da corda de arco complementar (MENDES, 1997).

Historicamente as tabelas de cordas feitas por Ptolomeu presentes no Almagesto foram consideradas uma aproximação das tabelas de senos e serviram de base para quase toda astronomia posicional até o trabalho de Copérnico (1473-1543) (PEREIRA, MOREY 2015; KENNEDY, 1992; BERLINGHOFF, GOUVÊA, 2012).

Contudo, os gregos construíram tabelas de cordas que relacionavam apenas conceitos geométricos dos círculos, como arcos e cordas. As tabelas passaram por modificações século depois por diversos matemáticos e astrônomos até chegar à Trigonometria que conhecemos atualmente (GOMES, 2011).

Novas perspectivas se abriram com os astrônomos hindus por meio do texto denominado *Surya Siddhanta* (Sistemas do Sol), abordada no próximo tópico.

Vale ressaltar que civilizações tais como gregas, hindus e árabes não usavam de razões trigonométricas, mas sim linhas trigonométricas representadas por cordas de um círculo (BOYER, 2012).

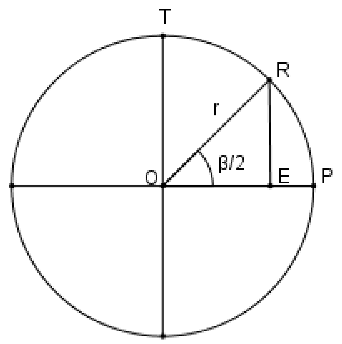
1.2.2.2 Meia corda: seno

Apesar de toda a contribuição da civilização grega, documentos relatam que a mais antiga tabela de senos foi descoberta na Índia, por volta dos séculos IV e V d.C., construída sob possíveis influências de Hiparco (BERLINGHOFF, GOUVÊA, 2012). Tanto os indianos quanto os árabes proporcionaram o fortalecimento da Trigonometria, pois diferentemente das aplicações das cordas apresentadas por Ptolomeu, os indianos utilizaram a relação entre metade de uma corda de um círculo e a metade do ângulo central correspondente, relação está conhecida como *jya* e presente no texto de aproximadamente 400 d.C., denominado *Surya Siddhanta* (Sistemas do Sol), obra importante para a história da Trigonometria (SAMPAIO, 2008; SOUZA, 2013). O seno surgiu a partir dos escritos dessa obra (KENNEDY, 1992).

Jya é uma das várias grafias para a palavra “corda” em hindu. Matemáticos árabes transliteraram *jya* para *jyb,* incorretamente lida como *jayb*. E do árabe para o latim, o tradutor Gerardo de Cremona (1150) traduziu para *sinus*, que hoje conhecemos e usamos como *seno* (KENNEDY, 1992).

O seno indiano, ou seja, a meia-corda era definida, segundo Kennedy (1992, p. 38) como: “metade da corda dividida pelo raio do círculo é o seno da metade do arco”, como representado na Figura 3:

Figura 3 - Representação da meia-corda hindu.



Fonte: Adaptado de Kennedy (1992).

Matematicamente, segundo Kennedy (1992), obtém-se:

$$sen\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{RE}{OR} = \frac{crd\ \frac{\beta}{2}}{r} = \frac{crd\ \beta}{2r}$$

Ao ter conhecimento a respeito do comprimento de uma corda por meio dos escritos gregos, aplicando-a na relação apresentada para o seno, obtém-se o valor da metade do arco. Como visto anteriormente, o $crd\ 90° = r\sqrt{2}$, então é possível encontrar o valor para a metade do arco:

$$sen\ 45° = sen\left(\frac{90°}{2}\right) = \frac{crd\ \beta}{2r} = \frac{crd 90°}{2r} = \frac{r\sqrt{2}}{2r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Característica importante a se notar é que a partir do uso da meia-corda é possível obter uma primeira visão de triângulo retângulo no círculo com relação ao seno.

No que se referem aos valores das tabelas de seno, eles variavam de acordo com o valor que era atribuído para o raio, visto que o valor do raio até então não era uma constante dentre os matemáticos da época. Estudos baseados em Ptolomeu, por exemplo, consideravam raio igual a 60, e estudos baseados em Hiparco com raio igual a 3438, como no caso dos indianos (BERLINGHOFF, GOUVÊA, 2012).

Aryabhata (500 d.C.) utilizou do raio de 3438 para construir uma tabela de senos. Com isto, para cada arco a tabela dava o comprimento do seno do arco (KATZ, 2010). Berlinghoff e Gouvêa (2012) relatam que para se calcular raios diferentes a estes valores apresentados, usava-se de proporcionalidade para ajustar valores.

Morey destaca (2003, p. 19 e 20):

> [...] para os indianos as funções trigonométricas ainda eram definidas como comprimento de um segmento e não como uma relação entre dois comprimentos, como é o caso as funções trigonométricas modernas. Então quando dizemos seno indiano estamos nos referindo ao comprimento da meia-corda do ângulo central.

Em consequência do seno, tem-se o seno complementar, denominado pelos hindus como *Kojya* representado na Figura 3 pelo arco $\overline{RT}$ e atualmente conhecido por cosseno. Berlinghoff e Gouvêa (2012) destacam que eventualmente a aplicação do seno complementar era necessária. Entretanto, até aquele momento da história, o conceito do mesmo não havia sido definido. Somente séculos depois com os estudos de Regiomontanus o seno complementar foi conceituado (PEREIRA, MOREY 2015).

Posteriormente, os árabes assumiram a Trigonometria das tabelas indianas de seno e aperfeiçoaram-na (KATZ, 2010).

1.2.2.3 Círculo de raio unitário

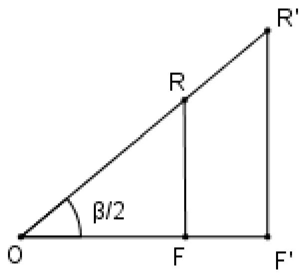
Os árabes proporcionaram relevantes contribuições para a Trigonometria, além de calcular o seno, os árabes calcularam as demais relações trigonométricas (cosseno, tangente, cotangente, secante, cossecante) (KATZ, 2010), sendo estas abordadas em seus respectivos tópicos nesta reconstrução.

Um marco com a influência da civilização árabe foi à fundação da Escola de Bagdad no século IX d.C, tendo como um de seus maiores pensadores o matemático Al-Battani (855-929 d.C.), com seus trabalhos em Astronomia e a construção de diversas tabelas das linhas trigonométricas, se baseando na Trigonometria indiana (SAMPAIO, 2008; BERLINGHOFF, GOUVÊA, 2012).

Segundo Costa (1997), foi Al-Battani quem introduziu o círculo de raio unitário e assim demonstrou que o seno é válido para qualquer triângulo retângulo, seja qual for o valor atribuído à hipotenusa. Seu interesse estava em calcular altitude do Sol, então utilizou das razões trigonométricas e construiu tabelas mais precisas que as existentes na época.

A fórmula usada para construir a tabela de Al-Battani considerou um triângulo retângulo com ângulo agudo $\frac{\beta}{2}$, no qual o seno é válido para qualquer medida da hipotenusa e do cateto oposto (COSTA, 1997), como na Figura 4.

Figura 4 – Representação de seno para qualquer triângulo retângulo.



Fonte: Adaptado de Costa (1997).

Matematicamente, temos:

$$sen\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{RF}{OR} = \frac{R'F'}{0R'} = \frac{jya}{1}$$

Com a pretensão de aperfeiçoar o Almagesto, Al-Battani usou do seno complementar em uma obra astronômica de sua autoria. Ficando conhecido também por utilizar de álgebra ao contrário de usar exclusivamente Geometria para os cálculos das tabelas de cordas (KATZ, 2010).

Segundo Oliveira (2014) a articulação da Trigonometria de arcos e cordas com a Trigonometria de razões de triângulo retângulos só foi possível com a adoção do raio como unidade de medida, ou seja, raio unitário, pois até então era considerado por diversos matemáticos diferentes medidas de raio ocasionando diferentes valores para o seno (GOMES, 2011). Consequentemente, os estudos árabes foram disseminados na Europa.

1.2.2.4 Seno e cosseno no triângulo retângulo

A Matemática europeia se familiarizou com a Matemática árabe. Consequentemente, vários estudiosos europeus procuraram tornar mais precisas às tabelas de senos e completá-las com outras funções. Um desses estudiosos foi Nicolau Copérnico (1473-1543), cuja precisão de seus cálculos contribuiu para que sua tabela substituísse a tabela de Ptolomeu utilizada por muitos anos como modelo na Astronomia. Com estudos de Regiomontanus, as tabelas sexagesimais passaram a ser substituídas por tabelas decimais e a partir do seno conceituou-se o cosseno (SAMPAIO, 2008).

A obra de Regiomontanus (1436-1475) *De triangulis Omnimodis Libri Quinque* (Triângulos de todos os tipos) é um trabalho dedicado a Trigonometria plana e esférica, dividida em cinco livros, dois abordando a plana e três, a esférica. Esta obra foi um marco histórico, pois até então a Trigonometria era estudada como parte da astronomia, mas a partir do século XVI ela se tornou independente, conforme pode-se observar na obra de Regiomontanus. Nesta mesma obra, Regiomontanus trabalhou conceito de seno e cosseno, que difere muito pouco do que se considera atualmente. Pereira e Morey (2015) apresentam o teorema mediante os senos na obra de Regiomontanus, presente no primeiro livro:

> Teorema 20: Em todo triângulo retângulo, um dos quais o vértice agudo é o centro de um círculo e cuja hipotenusa é o raio, o lado que subtende a este ângulo agudo é o seno reto do arco adjacente ao lado oposto ao ângulo dado e o terceiro lado do triângulo é igual ao seno do complemento do arco. (PEREIRA, MOREY 2015, p. 150)

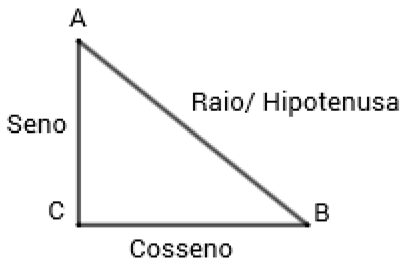
A fórmula que Regiomontanus usava para representar o valor do seno complementar de um ângulo era: $sen(90º - \theta)$, ou seja, a subtração entre o ângulo de noventa e o valor do ângulo do seno (BERLINGHOFF, GOUVÊA, 2012).

Sobre o termo seno complementar Edmund Gunter (1620) associou “complemento” com “seno”, tornando-se “co-sinus”, logo passou para “cosinus”, e no português ficou como “co-seno” ou “cosseno” (KENNEDY, 1992).

Rheticus (1514-1576) marcou a Trigonometria na Europa ao se dedicar a estudos de triângulos retângulos e definir as relações com ângulos ao invés de arcos, ou seja, quando se referia ao seno, não o representava mais por seno de um arco, mas sim seno de um ângulo. Sendo este um marco na História por atingir um elevado grau de desenvolvimento na Trigonometria (GOMES, 2011; SAMPAIO, 2008; KLINE, 1972).

Sampaio (2008) cita a definição que Rheticus utilizou para definir seno e cosseno no triângulo retângulo: “Em todo o triângulo com ângulo reto, o lado que subtende ao ângulo reto é chamado de hipotenusa. Se AB é o raio ou sinus totus (seno total), então a perpendicular é o seno e a base é o cosseno” (ZELLER, 1944, p. 56 apud SAMPAIO, 2008), como mostra a Figura 5. Consequentemente, Rheticus definiu as relações trigonométricas por razões entre lados de um triângulo retângulo utilizando de termos *perpendiculum* (perpendicular), *basis* (base) e *hypotenusa* (hipotenusa) (OLIVEIRA, 2013).

Figura 5 – Lados do triângulo retângulo.



Fonte: Os autores (2018).

Com a Trigonometria representada em triângulos retângulos o próximo passo de sua evolução foi ser representado como funções.

1.2.2.5 Definição de função seno e função cosseno

Pelos europeus as Funções Trigonométricas tomaram forma como a conhecemos atualmente, e isso se deve a estudos sobre a Geometria Analítica.

Geometria Analítica, também conhecida como Geometria das coordenadas nasceu em 1637 por René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat

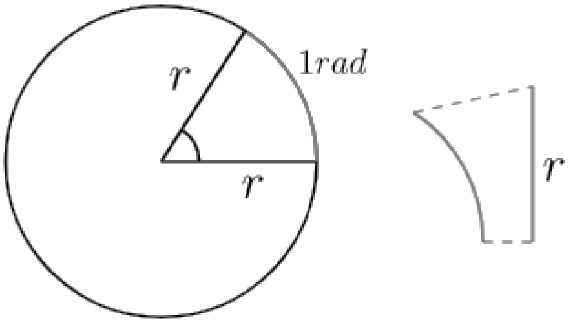
(1601-1665), eles apresentam em seus estudos técnicas básicas para relacionar e Álgebra e a Geometria, que posteriormente, com as contribuições de Wallis (1616-1703), Newton (1642-1727) e outros matemáticos, resultaram na área moderna de Geometria Analítica (KATZ, 2010; KLINE, 1972).

A Álgebra simbólica abriu caminhos para a Geometria Analítica, que por sua vez, abriu caminhos para as Funções Trigonométricas, sobretudo a partir de trabalhos desenvolvidos pelo matemático Leonhard Euler (1707- 1783) (BERLINGHOFF, GOUVÊA, 2012).

Berlinghoff e Gouvêa (2012) descrevem Euler como "uma mente com superabundância de ideias". Ele se dedicou a diversos ramos da Matemática e da Física, além da Astronomia, Engenharia e Filosofia. A História revela que Euler teve grande contribuição no desenvolvimento da Matemática. Na Trigonometria em particular, contribuiu com estudos sobre Funções Trigonométricas. Ele trabalhou com uma Matemática simbólica, algumas simbologias feitas por ele foram: $f(x)$ para representar funções; a, b, c para representar os lados de um triângulo ABC; para as funções seno e cosseno usou de abreviações como sen e cos; entre outras contribuições (BOYER, 2012).

Indo além, Euler trabalhou com funções no sentido moderno da palavra, ou seja, representada por expressões analíticas. A partir de seus trabalhos estabeleceu-se a Trigonometria que hoje conhecemos. Euler trabalhou em estudos com a unidade de medida em radianos, na qual o comprimento de um arco de um raio unitário mede exatamente uma unidade (BERLINGHOFF, GOUVÊA, 2012; GOMES, 2011), conforme se observa na Figura 6.

Figura 6 – Representação dos radianos como medida angular.



Fonte: http://www.matika.com.br/radianos/definicao-do-radiano

Quintaneiro, Giraldo e Pinto (2010) destacam que a única maneira de atender simultaneamente a necessidade da Trigonometria da circunferência e da Trigonometria do triângulo retângulo é com raio sendo uma unidade de medida única, ou seja, Euler adotou o radiano[1] como unidade de medida, sendo definido como medida angular e medida linear. Desse modo, o radiano passou a ser usado como unidade padrão no estudo das Funções Trigonométricas do círculo/circunferência trigonométrica (OLIVEIRA, 2014).

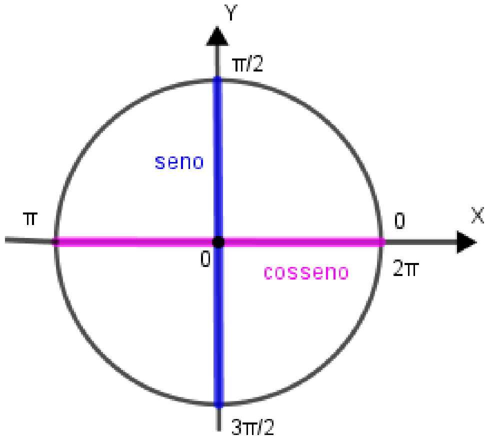
A partir de estudos com radiano, Euler considerou um círculo C com centro em $(0{,}0)$ e raio unitário. Fixando o círculo no ponto $A(1{,}0)$, que representa a origem dos arcos, associou cada número como um ponto do círculo C. Assim, criou a função Euler (E). O domínio da função E é o conjunto dos números reais (R) e o contradomínio é C. Portanto a função $E: \mathbb{R} \to C$ associa cada $x \in \mathbb{R}$ um ponto $P \in C, P = (a, b)$ pertence a C, se e somente se $a^2 + b^2 = 1$ (COSTA, 1997).

No livro *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748), Euler realizou o tratamento Analítico das Funções Trigonométricas, considerado este a obra chave da Análise Matemática. A partir da função E, sendo: $E(\theta) = (cos(\theta), sen(\theta))$, define que $cos(\theta) = x$ e $sen(\theta) = y$, ou seja, definiu seno e cosseno como um número obtido pelas coordenadas, não mais como segmento de reta, conforme pode-se observar na Figura 7, onde o seno corresponde a coordenada *y* (ordenada) e cosseno como coordenada *x* (abscissa) em um círculo unitário (OLIVEIRA, 2013).

---

[1] O termo radiano (radian) foi impresso pela primeira vez somente em (1873) por James Thonson, provavelmente inspirado pela palavra radius (raio) (QUINTANEIRO, GIRAL, PINTO, 2010).

Figura 7 - Representação de seno e cosseno na circunferência trigonométrica.



Fonte: Adaptado de Oliveira (2013).

Euler considerou a função E periódica no período em que faz uma volta completa no círculo C_1, ou seja, 2π , e a partir de então definiu as funções seno e cosseno como periódicas em 2π.

As funções periódicas possuem aplicação em diversas áreas, como:

> [...] música (a teoria da ressonância afirma a natureza matemática nas relações harmônicas), acústica (no estudo dos meios de propagação do som), eletricidade (no estudo do eletromagnetismo, equações matemáticas preveem ondas eletromagnéticas), mecânica (no movimento circular uniforme), entre outros (OLIVEIRA, 2013, p. 64-65).

Para maior conhecimento sobre a função Euler, Oliveira (2014) aborda detalhadamente este trajeto da função Euler para a circunferência trigonométrica, a partir da qual a Trigonometria passou a ser trabalhada em uma circunferência trigonométrica e, consequentemente, levou os matemáticos a estudarem seus comportamentos, esboçando-as como funções (OLIVEIRA, 2013).

Com relação ao gráfico do seno, no século XVII, Gilles de Roberval (1602-1675) fez o primeiro esboço de uma curva seno ao calcular a área sob uma cicloide. Mas o entendimento claro de como isso pôde ser feito foi detalhado a partir dos estudos de Euler (BERLINGHOFF, GOUVÊA, 2012). As relações trigonométricas, seno e cosseno, que inicialmente estavam ligadas a cálculos astronômicos, passaram a ser tratada com elementos da Geometria Analítica. Essa nova articulação proporcionou à Trigonometria um grande avanço em seu desenvolvimento e contribuir para que se tornasse um dos estudos independente da Matemática.

1.2.3 O Desenvolvimento das Relações Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante

A origem das relações tangente, cotangente, secante e cossecante diferem da origem do seno e cosseno, pois foram cunhadas a partir de sombras projetadas de um *gnômon* (cuja definição será apresentada no item 1.2.3.2). Antigas civilizações já conheciam essas relações e em um determinado período estudiosos árabes as consideraram também, assim, o próximo item apresenta as ideias iniciais que constituíram e sistematizaram essas quatro relações.

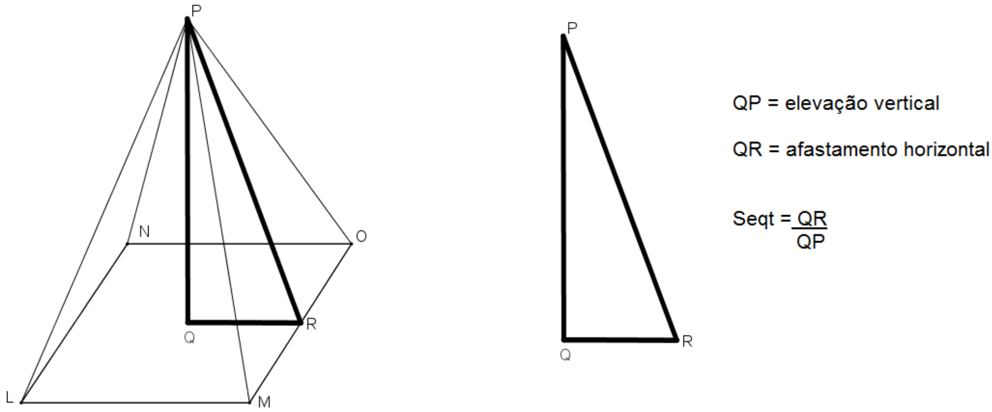
1.2.3.1 Inclinação da pirâmide

O desenvolvimento das relações tangente e cotangente também se deram de forma concomitantemente, mas não surgiram de estudos astronômicos. Suas origens estão diretamente ligadas aos egípcios com estudos de alturas e distâncias.

De acordo com o papiro Rhind, um dos documentos antigos mais importantes do Egito, diante da necessidade de manter uma inclinação constante das faces das pirâmides, os egípcios introduziram o conceito de *"seqt"*, que corresponde a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical (BOYER, 2012; EVES, 2011).

Na Figura 8 há uma pirâmide de base quadrada, como as do Egito, na qual destaca-se a razão entre a elevação vertical e afastamento horizontal: o *seqt*.

Figura 8 - Demonstração do *seqt* em uma pirâmide.



Fonte: Adaptado de Costa (1997).

Atualmente, o conceito de *seqt* é equivalente à cotangente de um ângulo, como Boyer (2012) e Eves (2011) afirmam, e pode ser representado matematicamente por:

$$seqt = cotangente\ \theta = \frac{QR}{QP} = \frac{\cos\theta}{sen\ \theta}$$

1.2.3.2 Projeção de sombras do *gnômon*

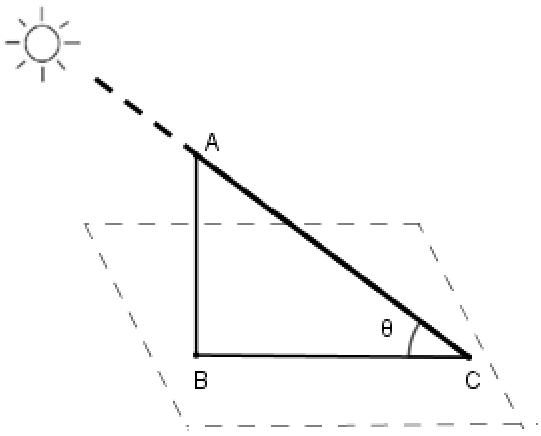
A História relata que os egípcios são considerados predecessores das funções tangente e cotangente ao associar sombras projetadas por *gnômon*, objeto constituído de uma vareta de comprimento definido espetada perpendicularmente no chão, formando um ângulo de 90º, a partir da qual se observava o comprimento de sua sombra. Portanto, utilizavam o conhecimento de ângulos relacionado ao comprimento da sombra ao longo do dia, e assim calculavam tabelas de sombras (COSTA, 1997; KENNEDY, 1992). Vale ressaltar que apesar de já ser utilizado pelos egípcios por volta de 1500 a.C., o *gnômon* chegou aos gregos pelos babilônios.

Os árabes, séculos depois, também se dedicaram as tabelas de sombras utilizando do *gnômon*, tanto para sombras verticais como horizontais e assim trabalharam com tangente, cotangente, secante e cossecante (KENNEDY, 1992).

O matemático árabe Abul-Wêfa (940-998) introduziu a secante e cossecante e calculou tabela de tangente, contudo alguns anos antes Habas (770-870) escreveu uma obra contendo as relações tangente, cotangente, secante e cossecante. Al-Biruni (973-1055) no seu *Tratado Exaustivo sobre as Sombras* apresenta de uma forma mais clara essas relações vinculadas a sombras de um *gnômon* (KATZ, 2010).

De acordo com o historiador Katz (2010), tendo um *gnômon* representado por $\overline{AB}$ (perpendicular ao plano) na Figura 9, a sombra do *gnômon* (ou "sombra direta") representado por $\overline{BC}$ (paralelo ao plano) foi denominada cotangente e o raio de incidência do sol (linha que une as duas extremidades da sombra e do *gnômon*) representado por $\overline{AC}$ (hipotenusa da sombra), denominado de cossecante, de acordo com o ângulo θ.

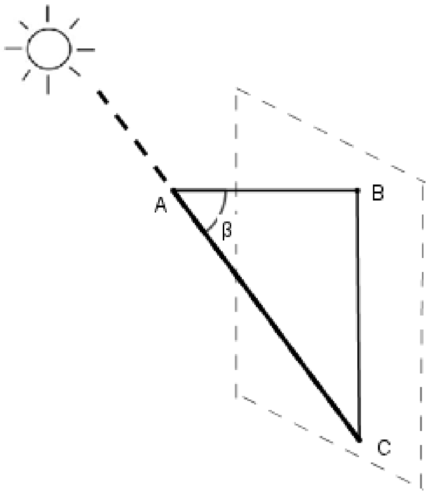
Figura 9 - Representação de cotangente e cossecante pela definição de Al-Biruni.



Fonte: Adaptado de Katz (2010).

Dando continuidade, mas agora considerando o *gnômon* paralelo ao plano horizontal, ou seja, perpendicular ao plano apresentado na Figura 10 e representado por $\overline{AB}$, tem-se que $\overline{AC}$ constitui o raio do sol e $\overline{BC}$ sombra do *gnômon*. A partir dessas definições, a "sombra invertida" $\overline{BC}$ foi estabelecida como tangente e $\overline{AC}$ (hipotenusa da sombra invertida) como secante, a partir do ângulo β.

Figura 10 - Representação de tangente e secante pela definição de Al-Biruni.



Fonte: Adaptado de Katz (2010).

Para calcular valores a estas funções Al-Biruni apresentou para as relações tangente e cotangente uma tabela, na qual considerou a tangente como quociente de seno e cosseno, e para a cotangente utilizou da relação $\cot\theta = (90º - \theta)$, ou seja, ele considerava a cotangente complementar a tangente (KATZ, 2010). De qualquer forma, vale ressaltar que, de acordo com o apresentado no item 1.2.3.1, os egípcios já possuíam conhecimento a respeito da cotangente, atualmente definida pelo quociente de cosseno e seno.

Para cossecante, Al-Biruni mostrou que a razão do *gnômon* (g) pela hipotenusa da sombra $(g\ cossec\ \theta)$ assim como o seno da altitude $(r\ sen\ \theta)$ está para o seno total (era considerado o valor do raio r) traduzida como (KATZ, 2010):

$$\frac{g}{g\ cossec\ \theta} = \frac{r\ sen\theta}{r}$$

Considerando que o raio possui valor unitário e o seno total equivale ao valor do raio, pode se estabelecer pelo Teorema de Tales descrevendo a razão da $cosec\ (\theta)$ como:

$$\frac{1}{cossec\ \theta} = \frac{sen\ \theta}{1}$$

$$cossec\ \theta = \frac{1}{sen\ \theta}$$

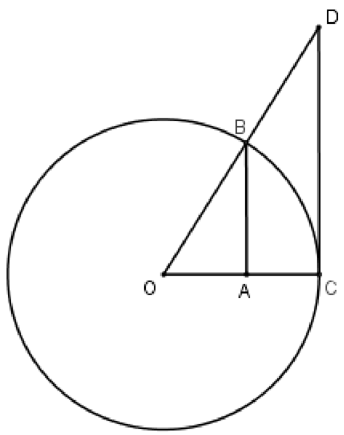
De forma análoga à cossecante, pode-se atribuir a razão para a secante, pois de acordo com as demonstrações realizadas a cossecante e secante são consideradas hipotenusas, assim tem-se que:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

Os significados atribuídos para os nomes atuais dessas relações trigonométricas se tornam claros a partir da interpretação geométrica considerando um círculo de raio unitário com o ângulo no seu centro. Segundo Eves (2011), a partir da Figura 11, pode-se definir:

> Se o raio do círculo é uma unidade, os valores de $tg\ \theta$ e $sec\ \theta$ são dados pelos comprimentos do segmento de tangente CD e pelo segmento de secante OD, respectivamente. Obviamente, cotangente significa simplesmente "tangente do complemento" e assim por diante. As funções tangente, cotangente, secante e cossecante foram conhecidas por vários outros nomes, sendo definidas os nomes atuais até o fim do século XVI (EVES, 2011, p. 266).

Figura 11 - Relações trigonométricas no círculo unitário.



Fonte: Adaptado de Eves (2011).

Contudo, de acordo com Sampaio (2008), as contribuições de Al-Biruni foram utilizadas apenas para usos astronômicos. No decorrer da História, outros matemáticos se dedicaram a calcular tabelas a respeito dessas relações e aprimorá-las. Rheticus além de trabalhar com seno e cosseno, também trabalhou com tangente, cotangente, secante e cossecante, definindo-as como razões relacionando ângulos de triângulo retângulo. Euler, assim como fez com seno e cosseno, estabeleceu essas outras quatro relações como funções, ampliando para seis as Funções Trigonométricas, atribuindo-lhes as abreviações utilizadas atualmente de: $tang, cot, sec, cosec$ (SAMPAIO, 2008). Porém, não foi encontrado fontes históricas que demonstrassem como essas funções foram definidas por Euler.

Em 1759 as funções passaram a ser definidas por números que representam ângulos, tornando-se $sen\ x, \cos x, tg\ x, cotg\ x, \sec x, cossec\ x$. Atualmente, a Trigonometria é concebida como um conjunto de números complexos, não sendo necessário recorrer a arcos ou ângulos (KENNEDY, 1992).

Fundamentado em referências como Eves (2011), Boyer (2012), Sampaio (2008), Costa (1992), Katz (2010), Kline (1972), Berlinghoff e Gouvêa, 2012 foi possível fazer uma reconstrução histórico-epistemológica das Funções Trigonométricas. Sua sistematização foi cunhada por diversas civilizações em diferentes períodos, estando intimamente ligada a um contexto prático que posteriormente se tornou uma área de conhecimento específica, na qual pôde abranger muitas mais áreas de aplicação. O caminho percorrido para que se reconstruísse esse conhecimento nos mostra o quanto a Matemática estava intimamente ligada ao cotidiano das civilizações, o quanto os estudos eram aplicáveis.

A História da Matemática nos proporciona um olhar que vai além da Matemática pronta que muitas vezes nos é apresentada, e quando associada a epistemologia podemos compreender a construção de conceitos e estruturas, no caso, atinentes à Trigonometria, proporcionando assim significados para uma melhor aprendizagem. Nesse sentido se insere a Teoria da Aprendizagem Significativa.

1.3 Aprendizagem Significativa

Com o objetivo de proporcionar a aprendizagem dos alunos a respeito do conteúdo de Funções Trigonométricas, buscou-se um caminho em que o conhecimento fosse algo significativo para os alunos. Diante disto, dentre as diversas teorias de aprendizagens, este trabalho se fundamenta na Teoria de Aprendizagem Significativa (TAS), desenvolvida por David Ausubel.

Moreira (2012) argumenta que em geral, nas escolas, ocorre uma aprendizagem mecânica, ou seja, uma aprendizagem produzida com pouco significado, cujo fator relevante é a memorização e não o significado do que se aprende. Essa memorização é útil para provas, testes, entre outros, e logo é esquecida, pois o objetivo era apenas memorizar para um fim, e, mesmo assim, nota-se que é utilizada pelos alunos e incentivada pelo próprio sistema escolar.

Borssoi (2013, p.34) considera que “a maneira como os conteúdos são disponibilizados aos alunos em uma situação de ensino pode levar a uma aprendizagem mais significativa ou mais mecânica”. A aprendizagem significativa possui como princípio o que o aluno já sabe, sendo este o fator mais importante que influência na aprendizagem (AUSUBEL, NOVAK, HANESIAN, 1980). Ao considerar dentre o que o aluno sabe, um conhecimento prévio que seja relevante para a aprendizagem de um novo conhecimento, denomina-se de subsunçor. O subsunçor, também conhecido como *ideia-âncora*, está presente na estrutura cognitiva do aluno permitindo dar significados a outros conhecimentos (AUSUBEL, 2003).

Segundo Ausubel (2003), a estrutura cognitiva é considerada uma estrutura hierárquica de subsunçores dinamicamente inter-relacionados. Os subsunçores são conhecimentos prévios relevantes que possuímos para aprendizagem de um determinado novo conhecimento. Quando a nova informação se ancora em subsunçores considerados relevantes ocorre à aprendizagem significativa (MOREIRA, MASINI 2016).

A aprendizagem significativa é definida como um processo no qual o sujeito que aprende relaciona de maneira *não-arbitrária* e *substantiva* uma nova informação a um aspecto relevante de sua *estrutura cognitiva*. Para compreender esta definição, faz-se necessário compreender os significados de alguns termos que caracterizam a teoria de Ausubel, como: a *relação não-arbitrária* e a *relação substantiva* (AUSUBEL, 2003).

Relação *não-arbitrária* é quando o novo conhecimento se relaciona não com qualquer aspecto da *estrutura cognitiva* do aluno, mas sim com conhecimentos especificamente relevantes, ou seja, os *subsunçores.* E a relação *substantiva* é quando o que é essencial no novo conhecimento é incorporado à *estrutura cognitiva* do aluno, e não às palavras exatamente usadas para expressá-las (AUSUBEL, 2003; MOREIRA, 2011).

1.3.1 Condições para a Aprendizagem Significativa

Ao colocar em prática esta teoria, Ausubel indica duas condições essenciais de grande influência para conduzir a aprendizagem significativa, a conhecer:

I) o material a ser utilizado para a aprendizagem deve ser potencialmente significativo para o aluno:

Para um material ser potencialmente significativo é necessário que a estrutura do mesmo não seja confusa nem arbitrária, de modo que se estabeleçam relações substantivas com os conhecimentos prévios sobre o novo conhecimento, ou seja, o novo conhecimento tem que se relacionar com os conhecimentos prévios que os alunos já possuem sobre o conteúdo a ser estudado (AUSUBEL, 2003).

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p.36) esta condição depende de dois fatores, que são “a natureza do assunto a ser aprendido e a natureza da estrutura cognitiva dos alunos” (p.36).

No que diz respeito à natureza do assunto, os autores se referem que a estrutura do material não seja confusa nem arbitrária, para que assim se estabeleça relações substantivas com os conhecimentos prévios a respeito do novo conhecimento. E a respeito da natureza da estrutura cognitiva, nela devem estar disponíveis conceitos subsunçores específicos para se relacionar com o novo conhecimento (MOREIRA, MASINI, 2016; BORSSOI, 2013). Neste contexto, Bernardelli (2014) cita que ao relacionar e assimilar a informação nova com os subsunçores pode ocorrer ampliação do conceito, tornando-o significativo, sendo este, o produto do processo de aprendizagem significativa.

Ausubel (2003) enfatiza que o material para aprendizagem é apenas potencialmente significativo, pois em concordância com Ausubel, Moreira (2012) relata que a capacidade em atribuir significados não está no material, ou seja, não existe uma atividade, aula, livro significativo, é o aluno quem atribui significados aos materiais de aprendizagem.

II) o aluno deve apresentar predisposição para relacionar o novo conhecimento de forma significativa à sua estrutura cognitiva:

A condição de predisposição para aprender, não se trata de motivações ou gostar da matéria, o aluno deve relacionar (diferenciando e integrando) os conhecimentos novos à sua estrutura cognitiva que contém conhecimentos prévios, dando significado a estes conhecimentos (MOREIRA, 2012).

Contudo, considera-se como condição para a aprendizagem significativa, relacionar o material potencialmente significativo com os subsunçores presentes na estrutura cognitiva do aluno, na qual o mesmo poderá manifestar disposição para aprender de maneira significativa relacionando o novo conhecimento com os subsunçores.

1.3.2 Facilitação da Aprendizagem Significativa

Diante da relevância dos subsunçores em todo o contexto, Moreira (2012) cita que surgem algumas questões: Como se formaram os primeiros subsunçores? E o que fazer quando os alunos não possuem? Para Moreira (2012) e Moreira e Masini (2016) os primeiros subsunçores são construídos por meio de interferências, abstrações, discriminações, descobrimentos, representações, envolvimentos em sucessivos encontros do aluno com objetos, conceitos, eventos. No começo, quando criança, o aluno depende muito de mediações de adultos, e então, progressivamente, ela passa a aprender cada vez mais em função de subsunçores já construídos e conforme a mediação de professores, segundo uma negociação de significados. Já na fase adulta, ocorre a assimilação, processo no qual um novo conhecimento interage com um conhecimento prévio especificamente relevante, de forma não-arbitrária e substantiva.

Quando não há subsunçores adequados que possam atribuir significado para um determinado conhecimento, os *organizadores prévios* podem ser usados. Estes *organizadores prévios*, como o nome já diz, são prévios e precedem a apresentação do material de aprendizagem de forma mais geral, mais ampla. Podem compreender situações problemas, perguntas, um filme, uma leitura introdutória, uma simulação, entre outros. A utilização dos *organizadores prévios* pode suprir deficiências de subsunçores ou mostrar a relação e a discriminação entre subsunçores existentes e os novos subsunçores (MOREIRA, 2012).

Há casos de um subsunçor não ser usado com frequência, podendo vir a ser obliterado, ou seja, ocorrer perda de discriminação entre significados. A ocorrência desse fato é normal, mas quando se trata de aprendizagem significativa, a reaprendizagem é possível e provavelmente rápida, de forma que o aluno não tenha muita dificuldade em resgatar, reativar ou reaprender o aprendizado. Note que quando ocorre, de fato, uma Aprendizagem Significativa, não se trata de um esquecimento total, pois se o esquecimento for total, o aluno teve uma aprendizagem mecânica e não significativa (MOREIRA, 2012).

Entre os conhecimentos prévios do aluno e os que irá adquirir, Bernardelli (2014) destaca que:

> "para um novo conhecimento ser adquirido com significado, o educando poderá perceber diferenças e semelhanças entre os significados prévios e os adquiridos. Dito de outra forma, estabelecer relação entre o dia a dia do educando e o conhecimento a ser apresentado. Dessa maneira, pontes cognitivas serão estabelecidas e os subsunçores dos educandos serão acionados, possibilitando uma provável aprendizagem significativa (BERNARDELLI, 2014, p. 20 e 21).

Deste modo, os subsunçores são relevantes para uma aprendizagem significativa de um novo conceito, considerados como âncora para aquisição de um novo conhecimento.

Quando o aluno começa a perceber as diferenças e semelhanças entre os mesmos, ocorrem interações entre eles e sua estrutura cognitiva se modifica, sendo caracterizadas por dois processos: *diferenciação progressiva* e a *reconciliação integradora* (AUSUBEL, 2003; BERNARDELII, 2014). De forma que durante a aprendizagem significativa o aluno, ao aprender, diferencie progressivamente e reconcilie integrativamente os conhecimentos prévios com os novos, princípios estes que devem ser incorporados na organização do ensino para facilitar a aprendizagem significativa dos alunos.

Dentre as formas organizacionais facilitadoras da aprendizagem significativa exposta por Ausubel, Novak e Hanesian (1980), destacamos a diferenciação progressiva e reconciliação integrativa:

Diferenciação progressiva: Neste processo os subsunçores vão adquirindo novos significados, tornando-se mais ricos, refinados e diferenciados, e posteriormente, podendo ser âncora para novas aprendizagens significativas.

> Quando os assuntos são programados de acordo com os princípios da diferenciação progressiva, as ideias mais gerais e mais inclusivas da disciplina são apresentadas em primeiro lugar. São então progressivamente diferenciadas, em termos de detalhe e especificidade. (AUSUBEL, NOVAK, HANESIAN, 1980, p.159).

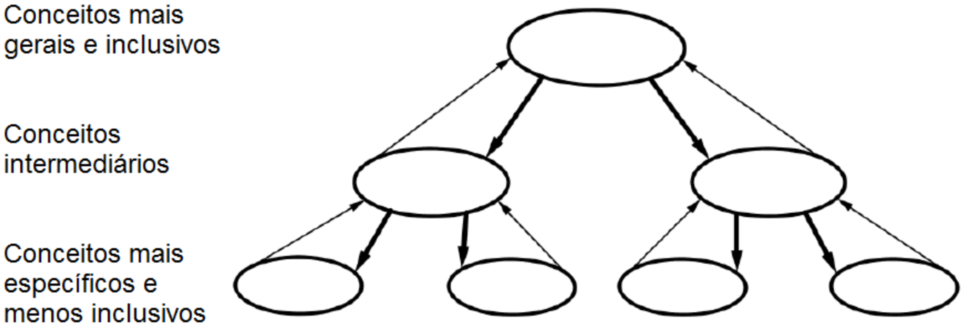
Reconciliação integradora: Neste processo explora-se relação entre ideias, indicar similares e diferenças significativas, de forma que reconcilie discrepâncias reais ou aparentes.

> O princípio da reconciliação integrativa da estrutura cognitiva, quando obtido por meio da programação de materiais instrucionais, pode melhor ser descrito como antitético à prática usual dos escritores de livros - texto de compartimentalizar e segregar ideias e tópicos particulares dentro dos seus respectivos capítulos ou sub-capítulos [...] Também admite que todas as referências cruzadas necessárias de ideias relacionadas podem ser, e habitualmente são, desempenhadas pelos alunos. (AUSUBEL, NOVAK, HANESIAN, 1980, p.161).

Estes dois processos são considerados processos de dinâmica da estrutura cognitiva do aluno. De acordo com Moreira (2011), neste contexto, são tratados como princípios programáticos instrucionais potencialmente facilitadores de aprendizagem significativa.

Para atingir estes processos em uma aprendizagem significativa deve-se organizar o ensino “descendo” e “subindo” nas estruturas conceituais hierárquicas que constitui a nova informação conforme for apresentado ao aluno. Esquematicamente, Moreira e Masini (2016) apresentam como ocorre estes processos na Figura 12, com as linhas mais fortes representando a diferenciação progressiva de conceitos e as linhas mais fracas representam a reconciliação integrativa, de forma que para se atingir a reconciliação integrativa é preciso “descer” dos conceitos mais abrangentes para os mais restritos e “subir” novamente para os abrangentes.

Figura 12 - Uma representação esquemática do modelo ausubeliano de diferenciação conceitual progressiva e reconciliação integrativa.



Fonte: Moreira e Masini (2016).

Os processos de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa são simultâneos e necessários para a construção cognitiva (MOREIRA, 2012). Em outras palavras, a *diferenciação progressiva* se caracteriza por diferenciar o conhecimento em uma organização hierárquica, iniciando com conceitos mais gerais e progressivamente com conceitos mais específicos. Por outro lado, a *reconciliação integrativa* integra os conhecimentos semelhantes. De tal forma, se faz necessário estar diferenciando, mas também reconciliando o conhecimento.

Algumas considerações devem ser seguidas de forma a facilitar a aprendizagem significativa do aluno, tais como destacar a relevância em realizar uma análise prévia do que irá ensinar, pois nem tudo que está programado em materiais educativos é importante, e a ordem como são colocados, nem sempre é a mais adequada para facilitar a interação com o conhecimento prévio do aluno. Ao realizar essa análise deve se pensar no aluno, pois como o autor destaca, “de nada adianta o conteúdo ter boa organização lógica, cronológica ou epistemológica, e não ser psicologicamente aprendível” (MOREIRA, 2011, p. 40).

Diante disso, considera-se importante também o papel do professor em organizar o material de ensino hierarquicamente, partindo de conceito de maior generalização para que possam ser relacionáveis e capazes de interagir com o maior número de conceitos restantes, procurando não sobrecarregar o aluno com informações desnecessárias que não venham ajudá-lo. Contudo, deve-se buscar sempre a melhor maneira para relacionar os aspectos mais importantes aos aspectos especificamente relevantes da estrutura cognitiva do aluno (BORSSOI, 2013).

1.3.3 Evidências de Aprendizagem Significativa

Diante dos elementos aqui apresentados que compõem a teoria da aprendizagem significativa, Ausubel ainda argumenta a respeito da evidência de compreensão significativa.

Neste sentido, a procura por evidências de compreensão de significados pode ser, segundo Moreira e Masini (2016):

- ao trabalhar com os alunos questões e problemas que sejam novos e não-familiares e que requeiram máxima transformação do conhecimento adquirido, tem-se uma evidência de que ocorreu a aprendizagem significativa. Essas novas situações e questões devem ser trabalhadas progressivamente ao longo do processo de aprendizagem do aluno, a fim de que ao realizar avaliações, a situação nova seja natural para ele.
- aplicar testes de compreensão com questões abordadas de formas diferentes com relação a sua escrita, e apresentá-las em um contexto distinto ao encontrado no material instrucional;
- solução de problemas é considerado um método prático e válido a procurar evidências de aprendizagem significativa, mas o fato de o aluno não conseguir resolver uma situação problema não se caracteriza necessariamente que ele não compreendeu os significados, pois este método implica em certas habilidades além da compreensão;
- diferenciar ideias relacionadas que não sejam idênticas, ou que identifiquem os elementos de um conceito ou proposição de uma lista, contendo também, os elementos de outros conceitos e proposições similares;
- propor aos alunos uma tarefa de aprendizagem sequencialmente dependente de outra, que não possa ser executada sem um perfeito domínio da anterior.

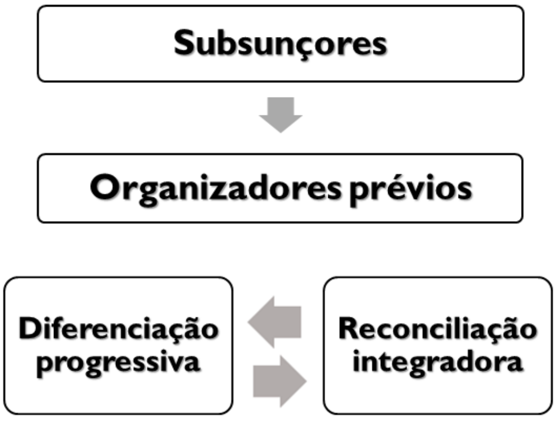
Pontos como estes, podem encaminhar para uma avaliação com relação a aprendizagem significativa dos alunos, pois, neste contexto, a avaliação não procura determinar se ocorreu o não uma aprendizagem significativa, mas procura evidências de uma aprendizagem significativa.

Nota-se, no cotidiano escolar que há o uso de provas a fim de avaliar sobre o que o aluno sabe ou não sabe, promovendo assim uma aprendizagem mecânica, em contrapartida a aprendizagem significativa considera que "o que se deve avaliar é a compreensão, captação de significados, capacidade de transferência do conhecimento a situações não-conhecidas, não-rotineiras" (MOREIRA, 2012, p.24).

A avaliação da aprendizagem significativa deve ser predominantemente formativa e recursiva, permitindo que o aluno refaça mais de uma vez as tarefas de aprendizagem, caso seja necessário, destacando a importância de que o aluno externalize os significados que está adquirindo, que explique e justifique suas repostas (MOREIRA, 2012).

Contudo, consideramos que esta teoria é um desafio para professores e alunos, é sair da comodidade, do tradicional, do simples, do rotineiro e desfrutar de uma aprendizagem que pode ser interiorizada pelo aluno, contribuindo, melhorando, desenvolvendo, ou seja, proporcionando significados aos conteúdos, sem deixar de lado aquilo que o aluno já possui como conhecimento. Diante disto, e dos elementos da Tas apresentados, (subsunçores, organizadores prévios, diferenciação progressiva e reconciliação integradora), consideramos que estes ocorrerão na estrutura cognitiva dos alunos de acordo com o esquema apresentado na Figura 13, na qual representa que a partir dos subsunçores identificados construa-se organizadores prévios necessários para a aprendizagem das Funções Trigonométricas, que assim proporcionaram subsídios para que os alunos possam diferenciar progressivamente e reconciliar integrativamente de forma simultânea e necessária para que ocorra a aprendizagem significativa dos alunos.

Figura 13 - Esquema de representação de como ocorrem os elementos da Aprendizagem Significativa.



Fonte: Os autores (2018).

A partir disso, buscou-se com esta pesquisa, por meio da elaboração e aplicação de uma Sequência Didática Potencialmente Significativa, analisar a fim de identificar se ocorreram evidências de aprendizagem significativa dos alunos, de acordo com os elementos destacados.

2 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

2.1 ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO DE PESQUISA

Para Gil (2002, p.17):

> Pode-se definir pesquisa como o procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. (...) A pesquisa é desenvolvida mediante o concurso dos conhecimentos disponíveis e a utilização cuidadosa de métodos, técnicas e outros procedimentos científicos. Na realidade, a pesquisa desenvolve-se ao longo de um processo que envolve inúmeras fases, desde a adequada formulação do problema até a satisfatória apresentação dos resultados.

De acordo com as fases que esta pesquisa envolveu desde sua elaboração até sua análise a fim de responder a problemática proposta, sua natureza é caracterizada como pesquisa qualitativa. A pesquisa qualitativa, segundo Godoy (1995) valoriza o contato entre o pesquisador, o ambiente e a situação na qual está sendo estudada. Nesta pesquisa o instrumento de observação, seleção, análise e interpretação dos dados coletados é o próprio pesquisador, considerado como pesquisador qualitativo. Este pesquisador qualitativo não está preocupado simplesmente com os resultados ou produtos, mas sim com o processo que percorreu.

Esta abordagem metodológica de pesquisa, a pesquisa qualitativa, foi fundamental para realização deste trabalho, visto que os pesquisadores tiveram o papel de observar, coletar e interpretar os dados coletados para o desenvolvimento da pesquisa, visando alcançar a assimilação de todas as fases que uma pesquisa exige.

De acordo com o tema e objetivos determinados por este trabalho, caracteriza-se que além de desenvolver uma pesquisa qualitativa, o cunho bibliográfico.

Segundo Gil (2002) a pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de materiais já elaborados. Tendo em vista que esta pesquisa envolve fontes históricas, buscamos como referências artigos científicos, dissertações, teses, revistas, anais, entre outros. Gil (2002) argumenta em sua obra a importância da pesquisa bibliográfica em estudos históricos: “A pesquisa bibliográfica também é indispensável nos estudos históricos. Em muitas situações, não há outra maneira de conhecer os fatos passados se não com base em dados bibliográficos" (GIL, 2002, p.45).

Portanto, a metodologia de pesquisa adotada neste trabalho foi a pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico que norteou os demais procedimentos metodológicos que serão apresentados a seguir.

2.2 Encaminhamento Metodológico de Ensino

As Diretrizes Curriculares de Matemática apresentam seis formas de encaminhamentos metodológicos de ensino que orientam a prática docente, sendo eles: Resolução de Problemas, Modelagem Matemática; Recursos Tecnológicos; Etnomatemática; História da Matemática; Investigações Matemáticas. Esta pesquisa utilizou-se da História da Matemática, cujo encaminhamento metodológico é apresentado a seguir.

2.2.1 História da Matemática

Conhecer como surgiu e o porquê dos assuntos matemáticos não é algo muito natural e rotineiro nas aulas de Matemática. De acordo com Lopes e Alves (2014), a História da Matemática é uma metodologia de ensino que pode tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes, visto que ao perceberem a fundamentação histórica do assunto matemático, o professor "tem em suas mãos ferramentas para mostrar o porquê de estudar determinados conteúdos, fugindo das repetições mecânicas de algoritmo" (p. 321).

De acordo com Luccas (2004) a inclusão desta abordagem metodológica de ensino, vem sendo discutida em nível mundial há algum tempo, por diversos meios científicos. Ao trabalhar com esta abordagem, Miguel e Miorim (2011) destacam que a mesma pode facilitar a significação e desmistificação da Matemática, pois "a forma lógica e natural como essa ciência é apresentada aos estudantes não reflete a forma como ela foi criada, a partir de tentativas e erros, recebendo a colaboração de diferentes povos em épocas distintas" (p. 52).

Portanto, considera-se com esta pesquisa que quando os alunos compreendem o processo de construção do conhecimento muitos porquês podem ser respondidos, e, além disso, torna-se a aula mais dinâmica e rica em conhecimento, pois ao estudar a História temos um leque de conhecimentos que contribuíram para o seu desenvolvido, como é o caso da Trigonometria.

Ao elaborar atividades, como a Sequência Didática para o ensino das Funções Trigonométricas, Paraná (2008) orienta que a História da Matemática é um elemento fundamental para a elaboração e também:

> (...) na criação de situações-problemas e na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos. Possibilita ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos, raciocínios e procedimentos (PARANÁ, 2008, p. 66)

Abordada a importância da metodologia História da Matemática, a seguir será apresentado o encaminhamento metodológico da história-epistemológica, sendo esta a abordagem metodológica de ensino adotada nesta pesquisa.

2.2.2 Histórico-Epistemológica

A epistemologia, segundo D'Amore (2007, p. 66), é um "ramo da Filosofia que estuda a maneira pela qual os conhecimentos científicos de certa área específica são constituídos, até mesmo para delimitar e caracterizar essa especificidade".

A epistemologia, nesta pesquisa, favoreceu a compreensão de como se desenvolveu a construção do conhecimento trigonométrico norteado pela História da Matemática. A partir de então, utilizou desta mesma abordagem para o ensino, conforme a colocação de Bernardelli (2014) baseada em Cachapuz *et al* (2005), que afirma:

> A epistemologia está necessariamente implícita em qualquer currículo de ciências. É dela em boa parte a concepção de ciência que é ensinada. É nessa convicção, pois, que o conhecimento de epistemologia torna os professores capazes de melhor compreender que ciência estão a ensinar, ajuda-os na preparação e na orientação a dar às suas aulas e dá um significado mais claro e credível às suas propostas (CACHAPUZ ET AL, 2005, p 73 apud BERNARDELLI, 2014, p. 34).

A partir da definição apresentada, utilizamos a epistemologia associada à História da Matemática, como metodologia de ensino a fim de orientar e auxiliar na preparação e desenvolvimento da Sequência Didática, com objetivo de proporcionar significados as aulas, de forma que os alunos construam o conhecimento.

Neste contexto Lucas (2010, p. 15) defende: “análises epistemológicas corretas de conceitos, no domínio do ensino de Ciências, pode ajudar na transposição de barreiras da contradição e da falta de significado que podem levar muitos estudantes ao não entendimento de assuntos científicos”.

Desta maneira, uma metodologia de ensino histórico-epistemológica pode contribuir para a aprendizagem dos alunos de forma que adquiram o entendimento correto sobre o conteúdo, diminuindo as dificuldades que possam apresentar durante as aulas, pois esta abordagem evidência o trajeto percorrido para a construção do conhecimento, destaca os erros e acertos e explicita que o conhecimento possuía uma finalidade, sendo esta uma porta para os alunos compreenderem o porquê dos conteúdos e sua origem.

Contudo, destaca-se:

> A abordagem histórico-filosófica possibilita, não só uma visão como uma compreensão maior dos problemas contemporâneos, tendo em vista que a análise epistêmica e metodológica da estrutura e das articulações que um determinado conhecimento sofre, desde sua criação até o desenvolvimento atual e a habilidade que ele apresenta para solucionar problemas, caracteriza-se como sendo de fundamental importância para a evolução da capacidade crítica e reflexiva do ser humano (LUCCAS, 2004, p. 26 e 27).

Considera-se que a abordagem metodológica de ensino Histórico-Epistemológica além de contribuir para a compreensão do conteúdo proposto, assume papel importante para que o aluno desenvolva sua capacidade crítica e reflexiva, sendo considerado, por esta pesquisa, fundamental para que a aprendizagem ocorra.

Com base nesta abordagem metodológica de ensino, foi construída o Produto Educacional referente a esta pesquisa, na qual apresentamos seu referencial metodológico a seguir.

2.3 Encaminhamento Metodológico para o Desenvolvimento da Sequência Didática

De acordo com Zabala (2010, p.15):

> Se entendermos que a melhora de qualquer das atuações humanas passa pelo conhecimento e pelo controle das variáveis que intervém nelas, o fato de que os processos de ensino/aprendizagem sejam extremamente complexos – certamente mais complexos do que os de qualquer outra profissão – não impede, mas sim torna necessário, que nós, professores, disponhamos e utilizemos referenciais que nos ajudem a interpretar o que acontece em aula.

A prática educativa não é algo simples a ser realizado, é necessário estar constantemente analisando-a e buscando meios para sua melhoria. Zabala (2010) destaca que um meio a ser utilizado é utilizar de referenciais que possam ajudar a compreender o que acontece em sala de aula, destacando que a prática deve ser reflexiva.

Segundo Zabala (2010, p.16), a prática é "algo fluido, fugidio, difícil de limitar com coordenadas simples, e além do mais, complexa, já que nela se expressam múltiplos fatores, ideias, valores, hábitos pedagógicos, etc.", com relação à prática educativa o autor elenca três variáveis que são estreitamente vinculadas e devem ser observadas dinamicamente durante a realidade nas aulas, que são: o planejamento, a aplicação e a avaliação (ZABALA, 2010).

Estes processos são considerados inseparáveis da atuação do docente, mas para refletir sobre, de acordo com o autor, é necessário delimitar unidades que os representem. A respeito das unidades, Zabala (2010) denomina-as como atividade ou tarefa, que pode ser: "uma exposição, um debate, uma leitura, uma pesquisa bibliográfica, tomar notas, uma ação motivadora, uma observação, uma aplicação, um exercício, o estudo, etc." (ZABALA, 2010, p.17).

Ao serem organizadas essas atividades em sequências significativas, denominadas pelo autor por "Sequências Didáticas", as mesmas permitem uma análise prática sobre as fases de planejamento, aplicação e avaliação. Sequências Didáticas correspondem a "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos" (ZABALA, 2010, p. 18).

Com base em Zabala (2010), foi construída uma Sequência Didática de atividades sobre o conteúdo de Funções Trigonométricas. Estas atividades foram ordenadas de acordo com a evolução histórica dos conhecimentos, estruturadas em um conjunto de questões para cada atividade e articuladas entre si pelo tema do conteúdo a ser estudado, visto que cada atividade se refere a um tema específico.

Cada questão elaborada foi norteada pelas características de aprendizagens de conteúdos definidas por Zabala (2010), a saber:

Factuais: “por conteúdos factuais, se entende o conhecimento de fatos, acontecimentos, situações, dados e fenômenos concretos e singulares” (ZABALA, 2010, p. 41). Estes conteúdos são memorizados, sendo equivalentes a fórmulas, dadas, nomes, entre outros;

Conceituais: conteúdo no qual o aluno “sabe utilizá-lo para interpretação, compreensão ou exposição de um fenômeno ou situação; quando ele é capaz de situar os fatos, objetos ou situações concretas naquele conceito que os inclui” (ZABALA, 2010, p. 43), na qual implica a compreensão sobre o conteúdo.

Procedimentais: “é um conjunto de ações ordenadas e com um fim, ou seja, dirigidas para a realização de um objetivo” (ZABALA, 2010, p. 43). Por este conteúdo pode ser considerado cálculos, desenhos, classificação, entre outros.

Atitudinais: conteúdos que “englobam uma série de conteúdos, que por sua vez, podemos agrupar em valores, atitudes e normas” (p.46), a saber:

Valores – são princípios ou ideias éticas que emite juízo a respeito das condutas e seus sentidos, como: respeito aos outros, responsabilidade, liberdade, etc.

Atitudes – são as formas que as pessoas se comportam com relação aos valores determinados, como: “cooperar com o grupo, ajudar aos colegas, respeitar o meio ambiente, participar das tarefas escolares, etc.” (ZABALA, 2010, p. 46).

Normas – são regras ou padrões de comportamento que indicam o que deve ou não ser feito pelos membros de um grupo.

Diante destas formas de conteúdos apresentadas, foram elaboradas as questões que compõem a Sequência Didática sobre o conteúdo de Funções Trigonométricas, na qual buscou-se contemplar também as variáveis que interferem na prática educativa, a elaboração, aplicação e avaliação, a fim de proporcionar uma aprendizagem significativa aos aluno associando a SD com a TAZ, assim denomina-se o produto de Sequência Didática Potencialmente Significativa.

De acordo que esta pesquisa, além de elaborar um Produto Educacional, esta pesquisa analisou os dados obtidos por meio da aplicação da Sequência Didática Potencialmente Significativa, incluídos nesta análise as questões com caráter de avaliação, de acordo com cada categoria estabelecida. A seguir apresentamos a metodologia utilizada para análise de dados.

2.4 Encaminhamento Metodológico para Análise de Dados

A Sequência Didática elaborada por esta pesquisa foi aplicada para alunos da Educação Básica, a fim de obter resultados que mostrem se a mesma é considerada satisfatória ou não para a aprendizagem do conteúdo de Funções Trigonométricas. Diante disto, foi necessário realizar uma análise sobre os dados oriundos da aplicação, por meio da Análise Textual Discursiva (ATD), dos autores Moraes e Galiazzi (2014), a qual a conceituam como:

> [...] uma metodologia de análise de dados e informações de natureza qualitativa com a finalidade de produzir novas compreensões sobre os fenômenos e discursos. Insere-se entre os extremos da Análise de Conteúdo e a Análise do Discurso, representa um movimento de caráter hermenêutico (MORAES, GALIAZZI, 2014, p.7)

Com esta metodologia é possível interpretar e proporcionar significados aos dados oriundos da pesquisa, oportunizando novas e profundas compreensões, na qual o papel do pesquisador é fundamental, pois é o próprio autor responsável pelos processos de organização, reconstrução, interpretação e adequação dos resultados.

Para tal realização é preciso considerar o conjunto de documentos que proporcionaram os resultados oriundos da pesquisa, denominado de "*corpus*". Desde modo, tais documentos foram analisados por três etapas que compõem a ATD, a saber: a unitarização; a categorização, e elaboração do metatexto. (MORAES, GALIAZZI, 2014).

A seguir será apresentada cada etapa com suas respectivas finalidades, de acordo com os autores Moraes e Galiazzi (2014).

Unitarização: a partir de uma leitura cuidadosa e profunda sobre o *corpus* realizar a desmontagem do mesmo, sendo considerada uma fase de extrema desorganização, mas com finalidade de identificar as Unidades consideradas significativas diante dos dados apresentados.

Categorização: é o processo de agrupamento das Unidades em subcategorias e Categorias, levando em consideração os aspectos semelhantes das Unidades. Durante este processo podem ser identificadas categorias *a priori* (conhecidas anteriormente ao processo de pesquisa) e categorias emergentes (quando surgem no processo de análise do *corpus*), como os autores mesmo colocam:

> Quando a opção é trabalhar com categorias a *priori*, o pesquisador deriva suas categorias de seus pressupostos teóricos, sejam explícitos ou implícitos. Nesse caso, as categorias já estão definidas antes de se encaminhar a análise e a classificação propriamente dita das unidades [...] Quando a opção é por categorias emergentes, o pesquisador assume uma atitude fenomenológica de deixar que os fenômenos se manifestem, construindo suas categorias a partir das múltiplas vozes emergentes nos textos que analisa (MORAES, GALIAZZI, 2014, p.117).

Elaboração do Metatexto: este é construído a partir das interpretações dos demais processos já realizados, na qual são constituídos de descrições de uma análise interpretativa. Ressalta-se que este processo é importante para a pesquisa e o pesquisador, pois “todo o processo de análise textual volta-se à produção de metatexto [...] possibilitando ao pesquisador assumir-se efetivamente autor de seu texto”. (MORAES, GALIAZZI, 2014, p. 33).

A respeito desta metodologia de análise, Moraes (2003) relata:

> No seu conjunto, as etapas desse ciclo podem ser caracterizadas como um processo capaz de aproveitar o potencial dos sistemas caóticos no sentido da emergência de novos conhecimentos. Inicialmente, leva-se o sistema até o limite do caos, desorganizando e fragmentando os materiais textuais da análise. A partir disso, possibilita-se a formação de novas estruturas de compreensão dos fenômenos sob investigação, expressas então em forma de produções escritas. A qualidade e originalidade das produções resultantes se dão em função da intensidade de envolvimento nos materiais da análise, dependendo ainda dos pressupostos teóricos e epistemológicos que o pesquisador assume ao longo de seu trabalho.

De acordo com as abordagens utilizadas nesta pesquisa, ou seja, a abordagem Histórico-Epistemológica e Aprendizagem Significativa, estas foram fundamentais para categorização da análise, a fim de se verificar a qualidade que se pode obter por meio da aplicação da Sequência Didática Potencialmente Significativa. Considera-se ainda que as etapas da ATD foram norteadoras para esta análise e enriqueceram as qualificações atribuídas a esta pesquisa.

Diante deste referencial, os dados oriundos da Sequência Didática Potencialmente Significativa foram analisados e apresentados no capítulo 4.

3 PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

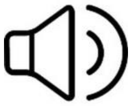
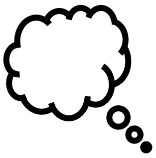
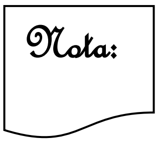
3.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA PARA O ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O Produto Educacional apresentado neste capítulo encontra-se disponível em: <http://www.uenp.edu.br/mestrado-ensino>. Ainda assim, a seguir apresentaremos na íntegra a Sequência Didática Potencialmente Significativa, sendo esta dividida em seis atividades, as quais serão apresentadas e detalhadas por meio de quadros que especifiquem os objetivos e comentários acerca de cada atividade e questão, a fim de proporcionar uma maior compreensão. Serão apresentadas também orientações para a aplicação da SD aos professores da Educação Básica que se interessarem pelo assunto, na qual inclui uma demonstração de resposta aceitável a cada questão, quando forem questões relacionadas às opiniões/interpretações dos alunos informamos como "resposta pessoal".

Antes de apresentar essas orientações, cabe esclarecer alguns elementos que compõem o *layout* da Sequência Didática Potencialmente Significativa, como as "caixas". Nestas, são descritos textos com o objetivo de explicitar determinadas informações, as quais encaminharam a aplicação da SD. Tendo em vista que são representadas por símbolos, seus significados são apresentados no Quadro 1:

Quadro 1 - Significado dos elementos que compõem a *layout* da Sequência Didática.

A História da Matemática: 	**"Caixa da História da Matemática":** são abordados os trechos históricos tirados da reconstrução histórico-epistemológica.
	**"Caixa da informação":** de acordo com os trechos históricos, esta caixa destaca uma informação em especifico.

?	**“Caixa da pergunta”:** são abordados questionamentos que antecedem o tema a ser estudado.
	**“Caixa da dica”:** para a resolução ou compreensão do tema estudado, destaca-se por esta caixa algumas dicas relacionadas a informação apresentada.
	**“Caixa do uso da internet ou computador”:** Toda vez que for necessário acesso a um site ou um software esta caixa informa qual o link correspondente.
	**“Caixa do refletindo”:** esta caixa é para enunciar as questões em que os alunos terão que refletir sobre o que foi estudado.
	**“Caixa das notas”:** são apresentadas considerações/observações durante o estudo.

Fonte: Os autores (2018).

3.1.1 Atividade: O que você sabe?

Esta Sequência Didática se inicia com atividade intitulada “O que você sabe?”, conforme apresentamos a seguir:

ATIVIDADE 1

"O que você sabe?"

1) Assinale os termos que você conhece, ouviu falar ou já estudou:

( ) triângulo retângulo	( ) seno	( ) cotangente
( ) cosseno	( ) tangente	( ) secante
( ) cossecante	( ) catetos	( ) ângulos
( ) Teorema de Pitágoras	( ) função	( ) ciclo trigonométrico

2) Você acha que a História da Matemática pode te ajudar a compreender os conceitos matemáticos?

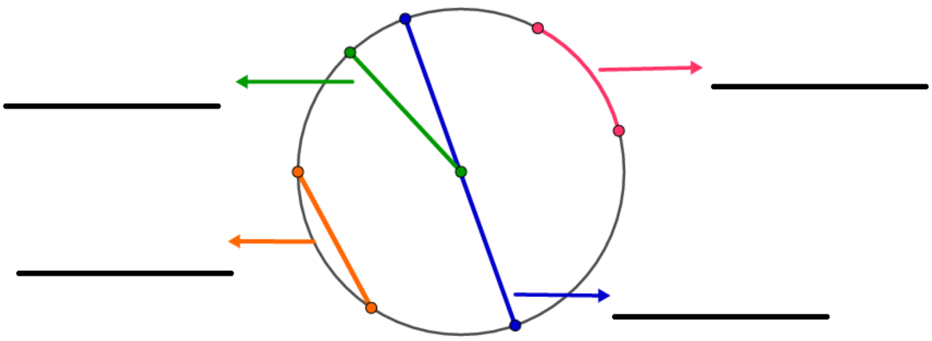
(   ) sim   (   ) não   (   ) não sei

Comente:

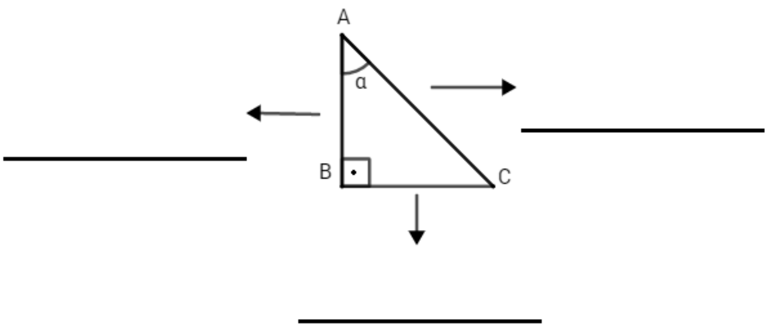
____

____

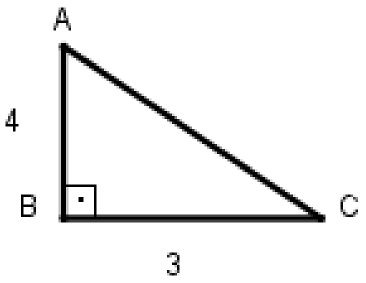
3) Identifique e nomeie corretamente os elementos da circunferência: corda, arco, diâmetro e raio, na figura a seguir:



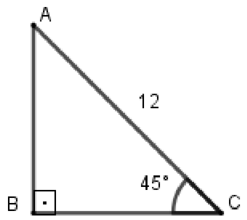
4) Nomeie os lados do triângulo retângulo a seguir:



5) Calcule o valor do lado $\overline{AC}$ no triângulo retângulo abaixo:



6) Sabendo que o seno e cosseno do ângulo $45^{\underline{o}}$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e utilizando as razões trigonométricas, calcule os valores de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.



Com base nesta primeira atividade, o Quadro 2 apresenta uma Ficha Explicativa, no sentido de orientar os professores que tiverem interesse em aplicá-la:

Quadro 2 - Ficha Explicativa da Atividade 1.

Atividade 1: O que você sabe?		
Objetivo da Atividade: Identificar quais são os conhecimentos prévios que os alunos possuem sobre o conteúdo Trigonometria.		
Identificação (Atividade:Questão)	**Objetivos**	**Respostas aceitáveis**
AT1: Q1	Identificar quais termos da Trigonometria os alunos conhecem, quais já ouviram falar e/ou se já foram estudados. Para isto eles devem assinalar estes termos.	Resposta pessoal.
AT1: Q2	O objetivo é que o aluno descreva sua opinião a respeito da História da Matemática relacionada aos conceitos matemáticos, se isso pode ajudar a compreender. São aceitáveis respostas “sim”, “não” e “não sei”, (visto que os	Resposta pessoal.

	alunos podem não saber o que é História da Matemática).	
AT1: Q3	Tendo em vista que nas atividades posteriores os alunos vão precisar distinguir os elementos de uma circunferência, se fez necessário a elaboração desta questão com o objetivo de verificar se sabem identificar e nomear os elementos de uma circunferência.	Raio, corda, diâmetro e arco.
AT1: Q4	Como na Trigonometria é muito utilizado o triângulo retângulo, esta questão identifica se os alunos sabem diferenciar, nomear e localizar os catetos e hipotenusa no triângulo retângulo.	Cateto adjacente, cateto oposto e hipotenusa.
AT1: Q5	Ainda com relação ao triângulo retângulo, verificar se os alunos reconhecem a aplicação/utilização do Teorema de Pitágoras, na qual identifica o valor do lado do triângulo que falta.	$hip^2 = cat^2 + cat^2$ $hip^2 = 4^2 + 3^2$ $hip = 5$
AT1: Q6	De acordo com o enunciado da questão, os alunos devem utilizar as razões trigonométricas adequadas com o objetivo de determinar o valor dos lados do triângulo que faltam.	$sen 45º = \frac{co}{hip}$ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{co}{12}$ $co = 6\sqrt{2}$ $cos 45º = \frac{ca}{hip}$ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ca}{12}$ $ca = 6\sqrt{2}$

Fonte: Os autores (2018).

Por outro lado, o Quadro 3 apresenta orientações para a realização da atividade 1.

Quadro 3 - Orientações para a atividade 1.

Atividade 1: O que você sabe?	
Duração:	1 hora/aula.
Conhecimento matemático envolvido:	• Elementos da circunferência; • Elementos do triângulo retângulo (cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa); • Teorema de Pitágoras; • Razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente).
Papel do professor:	Orientar o processo de execução, sem auxiliar os alunos a responderem.
Atividade:	Individual.
Materiais:	Atividade impressa.
Estratégia de ação:	Os alunos devem resolver as questões sem nenhuma ajuda do professor, para que demonstrem os conhecimentos que possuem a respeito das questões dadas. Para as questões que os alunos não souberem resolver é aconselhado que o professor oriente a escrever "não sei".
Avaliação:	As avaliações referentes a SD deveram ser analisadas por um todo em diversos aspectos relevantes, visto que toda e qualquer atividade lhe serão atribuídas valores de acordo com os quais o professor determinar, devido que o sistema necessita de notas. Para isso elencamos alguns critérios a serem avaliados, como: Sala de aula: • Comprometimento em realizar as tarefas. Respostas na SD: • O aluno apresentou o desenvolvimento dos cálculos e fórmulas, quando necessário. Podendo estar corretos ou não; • O aluno demonstrou tentativas de responder as questões; • Quando não soube responder, informou na questão isto a fim de não deixar questões me branco. Cujo objetivo não esta em atribuir notas para quem soube ou não responder, mas sim em coletar informações dos alunos a fim de analisar sua aprendizagem e a eficiência do material.

Fonte: Os autores (2018).

3.1.2 Atividade 2: Origem da Trigonometria

Após a realização da atividade 1, cujo objetivo corresponde a verificar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito de definições/conceitos relacionados à Trigonometria, a segunda atividade busca apresentar os conceitos fundamentais da Trigonometria, por meio da abordagem histórico-epistemológica:

ATIVIDADE 2

"Origem da Trigonometria"


globo.com g1 globoesporte gshow famosos & etc vídeos
MENU G1 CIÊNCIA E SAÚDE BUSCAR

Cientistas desvendam mistério matemático em tábua da Babilônia

Grupo da Universidade de Nova Gales do Sul, na Austrália, descobriram que objeto era possivelmente uma tábua trigonométrica, usada por ancestrais para calcular como construir palácios, templos e canais.

Para ter acesso à notícia na integra acesse o site:
http: //g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/cientistas-desvendam-misterio-matematico-em-tabua-da-babilonia.ghtml

Nota: com base na notícia, faça uma breve discussão a respeito do uso da trigonometria pelos povos da antiguidade.

?

Você sabe quando e como a trigonometria começou a ser utilizada?

A História da Matemática:

Estudos trigonométricos tiveram seus primeiros indícios registrados em rudimentos históricos tanto no **Egito** quanto na **Babilônia** datados 3000 a.C. (MENDES, 1997; COSTA, 1997). Obras importantes como o papiro **Cairo (3000 a.C.)** e papiro **Rhind (1650 a.C.)** evidenciam que os antigos já possuíam conhecimento a respeito dos ângulos, relações trigonométricas e triângulos retângulos, de modo que os aplicavam em diversos contextos como: construção de pirâmides, medição de sombras do *Gnômon* (relógio do Sol) para determinar horas do dia, cobranças de impostos para plantio de terras férteis nas margens de rios, divisão de terras, cálculos astronômicos, entre outros (EVES, 2011).

Observe as Figuras a seguir:

Figura 14 - Pirâmides do Egito.

Fonte: https://biosom.com.br/blog/curiosidades/como-foram-construidas-as-piramides-do-egito/

Figura 15 - *Gnômon,* conhecido também por relógio do Sol.

Fonte: http://clickeaprenda.uol.com.br/portal/mostrarConteudo.php?idPagina=27309

1) Explique de que maneira a trigonometria era utilizada por esses povos.

____

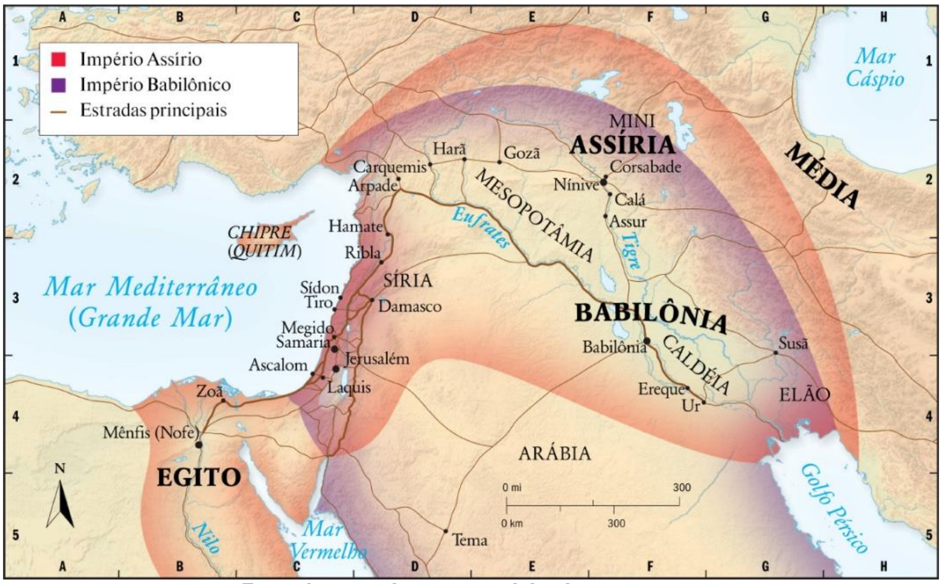
____

____

____

2) Onde ficam o Egito e a Babilônia no mapa abaixo? Circule

Figura 16 - Localização das regiões dos povos babilônios e egípcios.



Fonte: https://wol.jw.org/pt/wol/d/r5/lp-t/1102003106

3) Atualmente essas regiões compreendem quais países? Circule no mapa essas regiões.

Figura 17 - Localização das regiões atualmente.

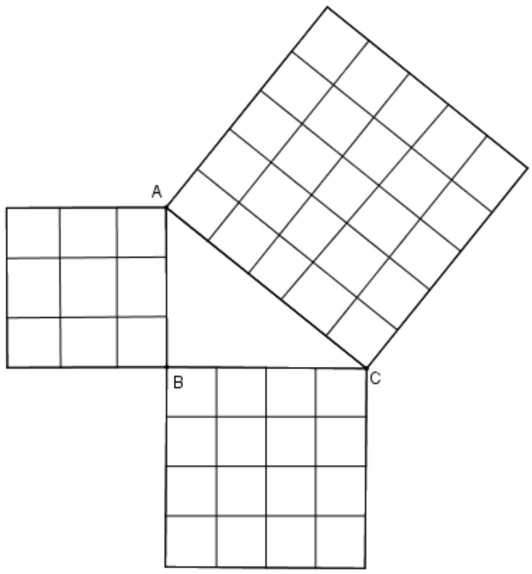
Fonte: https://galeri.uludagsozluk.com/r/mezopotamya-388816/

A História da Matemática:

No Oriente Antigo, os **gregos,** também contribuíram para a sistematização do conhecimento trigonométrico (BOYER, 2012). **Pitágoras** (VI a. C.) foi um estudioso grego que contribuiu significativamente para a História da Matemática consolidando a relação entre lados de um triângulo retângulo, conhecido como Teorema de Pitágoras. Contudo, de acordo com o historiador Boyer (2012), essa relação já era de conhecimento dos babilônios e dos egípcios.

4) Observe a Figura 18 e responda:

Figura 18 - Triângulo retângulo.



a) Quanto vale cada cateto e a hipotenusa?

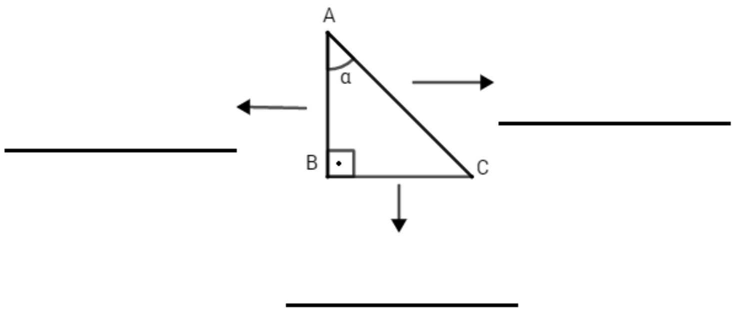
b) Quantos quadradinhos há em cada extensão dos lados do triângulo retângulo?

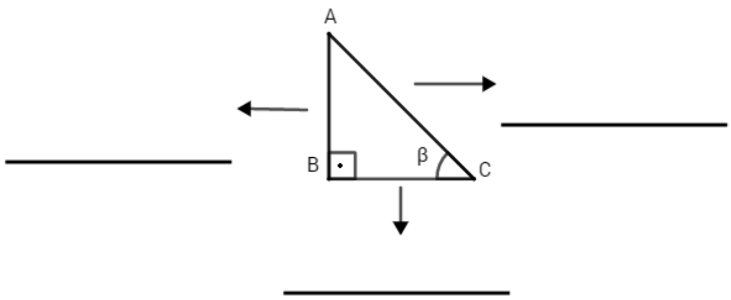
5) Na Figura 18 pinte no quadrado do lado da hipotenusa o número de quadradinhos referente a quantidade dos quadradinhos dos catetos. O quadrado referente à hipotenusa foi totalmente preenchido? O que podemos concluir?

6) Como esse Teorema pode ser representado algebricamente?

CATETO OPOSTO, CATETO ADJACENTE E HIPOTENUSA

7) Identifique hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente nos triângulos retângulos apresentados a seguir:





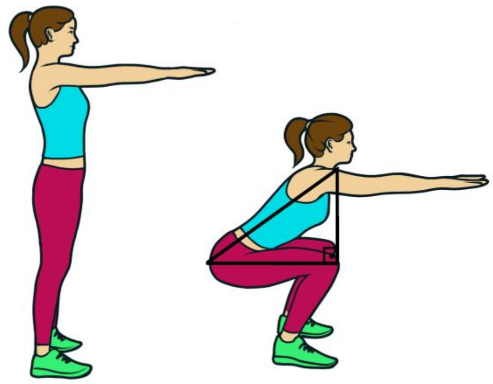
8) Com base na questão anterior é possível afirmar que:

a) O cateto oposto está _________ ao ângulo a ser considerado.
b) O cateto adjacente está _________ do ângulo a ser considerado.
c) A hipotenusa está oposta ao ângulo de valor ___________.

9) Ao olhar ao nosso redor podemos observar que cada vez mais as pessoas estão procurando fazer atividades físicas, ou seja, cuidar do seu corpo. Nas academias praticam-se diversos exercícios. Um deles é o agachamento, que consiste em: *"com os pés afastados na largura dos seus ombros e ligeiramente na diagonal, flexione lentamente os joelhos até que as coxas fiquem totalmente paralelas ao chão, e então volte para posição inicial".* (Informação entre aspas disponível em: https://www.ativo.com/corrida-de-rua/treinamento-de-corrida/dicas-para-fortalecer-membros-superiores-e-inferiores-do-corpo/)

Ana realiza uma série de agachamento de forma que seu quadril fique na mesma reta que seus joelhos. Podemos visualizar essa postura como um triângulo retângulo, conforme Figura 19:

Figura 19 - Exercício físico: agachamento.

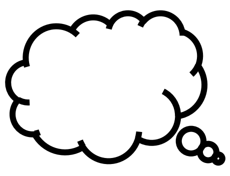


(Imagem disponível em: https://www.ativo.com/corrida-de-rua/treinamento-de-corrida/dicas-para-fortalecer-membros-superiores-e-inferiores-do-corpo/)

O *personal trainer* de Ana fez as seguintes medições:

- ✓ Distância do joelho ao quadril = 45 cm
- ✓ Distância quadril aos ombros = 55 cm

Com base nessas medições, qual deve ser a distância dos ombros ao joelho de Ana?



Afinal de contas, para que serve o Teorema de Pitágoras?

____

____

____

Com base nesta segunda atividade, o Quadro 4 apresenta uma Ficha Explicativa no sentido de orientar os professores que tiverem interesse em aplicá-la:

Quadro 4 - Ficha Explicativa da Atividade 2.

Atividade 2: Origem da Trigonometria		
Objetivo da Atividade: Contribuir, de acordo com a metodologia de Ensino Histórico-Epistemológica, para uma aprendizagem significativa dos alunos sobre os elementos do triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras, os quais permitem: - formalização algébrica do Teorema de Pitágoras a partir de demonstração; - resolução de situação problema que envolve Teorema de Pitágoras; - identificação dos elementos do triângulo retângulo, a saber: cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa.		
Identificação (Atividade:Questão)	**Objetivos**	**Respostas aceitáveis**
AT2: Q1	De acordo com as informações históricas, identificar se os alunos compreenderam como a Trigonometria era utilizada pelos antigos, demonstrando assim sua aplicabilidade desde a antiguidade.	Os exemplos citados são algumas das respostas aceitáveis: construção de pirâmides, medição de sombras do *Gnômon* (relógio do Sol) para determinar horas do dia, cobranças de impostos para plantio de terras férteis nas margens de rios, divisão de terras, cálculos astronômicos, entre outros.
AT2: Q2	Para uma melhor compreensão histórica a respeito das regiões onde a Trigonometria teve origem, esta questão visa identificar geograficamente onde se localizavam o Egito e a Babilônia.	Circular “Babilônia” e “Egito” que estão em negrito na imagem.
AT2: Q3	Após identificar sua localização na antiguidade, esta questão tem por finalidade identificar os	Circular “Iraq” e “Egypt”.

	países correspondentes na atualidade.	
AT2: Q4 (*a, b*)	Nos textos históricos foram relatados sobre o Teorema de Pitágoras, portanto para a compreensão deste conteúdo a questão 4 apresenta demonstrações possíveis para este Teorema. Na letra *a*, os alunos devem identificar que a soma dos catetos representados por $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ não correspondem à hipotenusa representada por $\overline{AC}$. Contudo, observa-se na letra *b* que a soma das áreas dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ (quadradinhos) corresponde a área da hipotenusa representado por $\overline{AC}$.	a) Hip = 5; cat = 4; cat = 3. b) Hip = 25; cat = 16; cat = 9.
AT2: Q5	Esta questão procura explicitar o comentado na letra b da questão anterior, a qual se refere a continuação da demonstração do Teorema de Pitágoras. Portanto, os alunos devem relacionar os quadrados menores (catetos) com o quadrado maior (hipotenusa) identificando a relação entre eles.	A área do quadrado referente à hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados referentes aos catetos.
AT2:Q6	Para finalizar a demonstração do Teorema de Pitágoras, esta questão tem por objetivo expressar algebricamente o que foi definido qualitativamente a partir da questão 5, ou seja, a fórmula que representa o Teorema de Pitágoras.	$hip^2 = cat^2 + cat^2$
	Nos estudos sobre triângulo retângulo na Trigonometria é	1º triângulo retângulo: cateto adjacente ($\overline{AB}$), cateto

AT2: Q7	indispensável que os alunos saibam identificar de forma adequada o cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa. Nesta questão os alunos devem identificar os mesmos, de acordo com o ângulo em destaque na Figura apresentada.	oposto ($\overline{BC}$), hipotenusa ($\overline{AC}$). 2º triângulo retângulo: cateto oposto ($\overline{AB}$), cateto adjacente ($\overline{BC}$), hipotenusa ($\overline{AC}$).
AT2: Q8	Os alunos devem completar as frases dando significados sobre o que é o cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa, com base na resolução da questão 7.	a) Oposto. b) Ao lado. c) 90º.
AT2: Q9	Diante da demonstração e formalização do Teorema de Pitágoras, os alunos devem resolver a situação problema proposta, inicialmente identificando um triângulo retângulo e em seguida os valores correspondentes aos catetos e hipotenusa. Posteriormente, resolver matematicamente a questão, a qual pode proporcionar aos alunos compreensão sobre quais situações são aplicáveis o Teorema de Pitágoras.	$hip^2 = cat^2 + cat^2$ $55^2 = 45^2 + cat^2$ $cat = 31{,}6$ Resposta: A distância do ombro ao joelho de Ana é de 31,6 cm.
AT2: RF	Tendo como base a História da Matemática apresentada e a situação problema proposta na questão 9 os alunos possuem subsídios para refletirem a respeito do conteúdo estudado e descrever sua finalidade.	Resposta pessoal.

Fonte: Os autores (2018).

No que se refere às orientações para a realização da atividade 2, as mesmas são apresentadas no Quadro 5.

Quadro 5 - Orientações para a Atividade 2.

Atividade 2: Origem da Trigonometria	
Duração:	1 hora/aula.
Conhecimento matemático envolvido:	• Área de quadriláteros; • Teorema de Pitágoras; • Elementos do triângulo retângulo (cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa).
Papel do professor:	Orientar, mediar e auxiliar o processo de construção do conhecimento.
Atividade:	Individual na resolução e em grupos para a discussão do “Refletindo”.
Materiais:	• Atividade impressa; • Acesso à internet (caso a escola não possua, a atividade pode ser realizada sem problemas).
Estratégia de ação:	Ao iniciar atividade, o professor junto com os alunos, promovem uma discussão breve sobre a notícia, em seguida o professor questiona os alunos com a questão da “caixa da pergunta”, e os convida a conhecer a origem da Trigonometria. O professor pode propor uma leitura dinâmica com os alunos sobre a “caixa da História da Matemática”, e em seguida resolverem as questões propostas individualmente. No que se refere às questões relacionadas a demonstrações e cálculos, o professor pode orientar os alunos como resolverem, no sentido de fornecer meios que os levem a pensar sobre. Porém, nunca fornecer as respostas. Para finalizar, os alunos devem responder ao “Refletindo” e realizar uma discussão entre eles sobre o que compreenderam.
Avaliação:	As avaliações referentes a SD deveram ser analisadas por um todo em diversos aspectos relevantes, visto que toda e qualquer atividade lhe serão atribuídas valores de acordo com os quais o professor determinar, devido que o sistema necessita de notas. Para isso elencamos alguns critérios a serem avaliados, como: Sala de aula: • Participação do aluno durante as discussões e leituras históricas; • Comprometimento em realizar as tarefas. Respostas na SD: • O aluno apresentou o desenvolvimento dos cálculos e fórmulas, quando necessário.

	Podendo estar corretos ou não; • O aluno demonstrou tentativas de responder as questões; Cujo objetivo não esta em atribuir notas para quem soube ou não responder, mas sim em coletar informações dos alunos a fim de analisar sua aprendizagem e a eficiência do material.

Fonte: Os autores (2018).

3.1.3 Atividade 3: Razões Trigonométricas

Após a realização da atividade 2, na qual foi abordado sobre o Teorema de Pitágoras e os elementos do triângulo retângulo, os alunos possuem subsídios necessários para compreenderem as razões trigonométricas, assunto da terceira atividade proposta:

ATIVIDADE 3

"Razões trigonométricas"

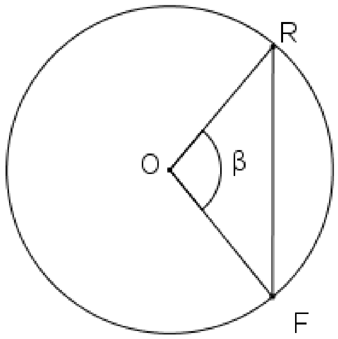
A História da Matemática:

A Matemática, historicamente, ficou marcada por ser muito utilizada em cálculos na Astronomia. Os gregos dedicavam-se a estes estudos, pois queriam compreender as posições dos astros, como a Terra e o Sol se moviam, distâncias entre Terra, Sol e Lua, entre outros. Para isto, os gregos utilizavam de métodos geométricos.

Uma obra que marcou os estudos astronômicos dos gregos foi o **Almagesto,** que possuía a maior fonte de conhecimentos sobre a Astronomia. **Ptolomeu** (127-150 d.C.), autor desta obra, se baseou em métodos geométricos considerando o círculo e seus elementos, e assim construiu a tabelas de cordas a fim de facilitar os cálculos astronômicos (PEREIRA, MOREY, 2015).

Para a construção das tabelas de cordas, Ptolomeu considerou um círculo e relacionou o arco central (β) com o comprimento da corda ($\overline{RF}$) representado por *crd* no Almagesto, conforme Figura 20.

Figura 20 - Representação do comprimento da corda (*crd*) com relação ao arco central na circunferência.



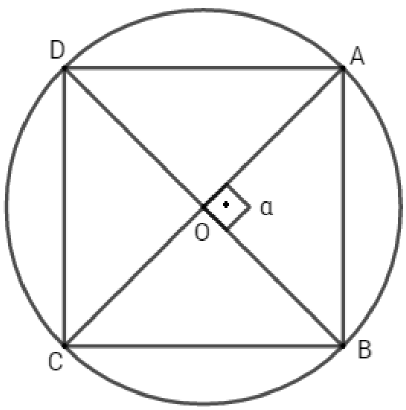
Definição de corda: O termo corda representa o segmento de reta que une dois pontos extremos de um arco do círculo (KENNEEDY, 1992).

Para o cálculo de cordas, Ptolomeu trabalhou com polígonos inscritos em circunferências (PEREIRA, MOREY, 2015).

✐ Seguindo os passos de Ptolomeu vamos calcular cordas!

1) Dada a circunferência a seguir, temos um quadrilátero inscrito.

Figura 21 - Quadrilátero inscrito na circunferência.



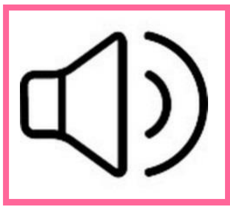
a) As diagonais do quadrilátero correspondem ao diâmetro da circunferência, sendo eles os segmentos: ___________ e __________;

b) Os lados do quadrilátero correspondem às cordas do círculo, sendo esses os segmentos: ________, _________, _________ e ________;

c) Identifique o ângulo correspondente a $\overline{AB}$: _______

d) Destacando o triângulo retângulo formado por AOB e adotando o valor 1 para os raios $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, calcule o lado $\overline{AB}$ (corda) utilizando o Teorema de Pitágoras:

A corda $\overline{AB}$ corresponde a: ________.

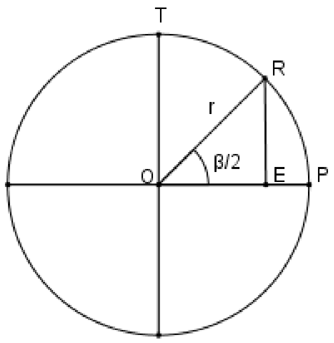


Mas nem todos os estudiosos consideraram as cordas em seus cálculos trigonométricos.

A História da Matemática:

No século IV, **os indianos** utilizaram a relação entre metade de uma corda de um círculo e a metade do ângulo central correspondente (Figura 22), relação está conhecida como *jya,* presente no texto denominado ***Surya Siddhanta*** (Sistemas do Sol), obra importante para a história da Trigonometria (SAMPAIO, 2008; SOUZA, 2013). *Jya* é uma das várias grafias para a palavra "corda" em hindu. Matemáticos árabes transliteraram *jya* para *jyb,* incorretamente lida como *jayb*. E do árabe para o latim, o tradutor Gerardo de Cremona (1150) traduziu para *sinus*, que hoje conhecemos e usamos como *seno* (KENNEDY, 1992).

Figura 22 - Representação da meia corda na circunferência.



De acordo com a Figura 22, seno correspondia ao segmento $\overline{RE}$. Contudo, considerando os valores das tábuas trigonométricas é possível deduzir que os indianos tenham estabelecidos relações entre os lados do triângulo retângulo que se observa na Figura 22, assumindo o seno como a razão entre cateto oposto (co) pela hipotenusa (h). Logo, algebricamente temos:

$$sen\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\overline{RE}}{r} \qquad \text{ou} \qquad sen\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{co}{h}$$

✏ Com base no texto acima, responda:

2) Levando em consideração a alternativa “c” do exercício 1, qual é valor do ângulo referente a meia corda indiana?

____

3) Se os gregos consideravam corda e os indianos meia corda, com base na alternativa “d” do exercício 1, calcule o valor de seno.

Nota: Para encontrar valores para ângulos diferentes de 45º os antigos utilizavam de outros polígonos inscrito na circunferência, como hexágono, decágono, entre outros.

Nota: nos dias atuais, utiliza-se os cálculos sistematizados pelos indianos que utilizavam da meia corda (sec. IV).

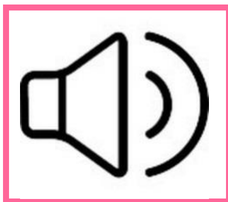
Considerando a relação estabelecida acima, muitos problemas podem ser resolvidos.

4) Um dos pontos turísticos de Curitiba-PR é a torre de telefonia "Oi torre Panorâmica". A torre é a única no Brasil que possui o mirante aberto à visitação com uma vista de aproximadamente 109,50 metros de altura, que permite uma visão da cidade moderna, organizada e charmosa com suas avenidas riscadas em meio a uma imensidão verde no bairro Mercês, na zona norte da cidade. (Informação disponível em: http://www.curitibacity.com/pt/mirantes/76-torre-da-telepar.html).

Figura 23 - Torre de telefonia "Oi torre Panorâmica" (Curitiba-Pr).

(Imagem disponível em: http://www.baggioimoveis.com.br/blog/conhecendo-o-bairro-merces/)

Uma pessoa se localiza a certa distância do mirante formando com o solo um ângulo de 45º. Esquematiza a situação problema em um desenho anotando as informações mencionadas e determine qual é a distância dessa pessoa ao mirante?



Em consequência do seno, temos o cosseno.

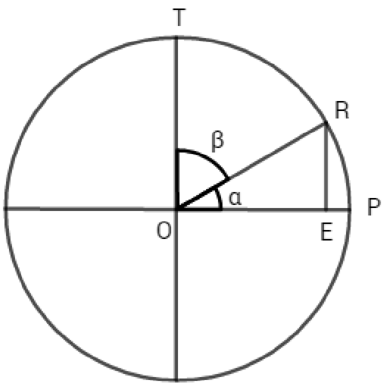
A História da Matemática:

O europeu **Regiomontanus** (1436-1475) em sua obra *De triangulis Omnimodis Libri Quinque* (Triângulos de todos os tipos) trabalhou conceito de seno e seno complementar. A fórmula que Regiomontanus usava para representar o valor do seno complementar de um ângulo era $\text{sen}(90º\text{-}\alpha)\text{sen}(90º\text{-}\alpha)$, , ou seja, a subtração entre o ângulo de noventa e o valor do ângulo do seno (BERLINGHOFF, GOUVÊA, 2012).

Sobre o termo seno complementar, Edmund Gunter (1620) associou “complemento” com “seno”, tornando-se “co-sinus”, logo passou para “cosinus”, e no português ficou como “co-seno” ou “cosseno” (KENNEDY, 1992).

5) Com base no texto acima e de acordo com a Figura 24, sabemos que o cosseno corresponde ao $sen(90º - \alpha)$. Responda:

Figura 24 - Representação do cosseno na circunferência.



a) seno de 30º = cosseno de ________

b) seno de 45º = cosseno de ________

c) seno de 60º = cosseno de ________

d) seno de 36º = cosseno de ________

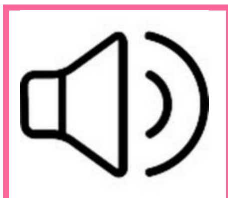
6) Com base na questão 5, complete o quadro dos ângulos notáveis para cosseno:

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno			

7) Sabendo que o seno é razão entre cateto oposto e hipotenusa, o cosseno corresponde à razão entre ____.

8) De acordo com informações do site G1, em 2015, foi aprovada uma emenda parlamentar para que as torres de comunicação como telefonia celular, radio difusão, internet e televisão, ao invés de 110 metros, fossem construídas com 300 metros de distância de hospitais, clinicas, asilos, escolas e creches, com o objetivo de reduzir o número de torres da cidade. (Informação disponível em: http://g1.globo.com/sao-paulo/itapetininga-regiao/noticia/2015/04/camara-aprova-projeto-que-diminui-distancia-para-instalacao-de-antenas.html)

Considerando que uma torre de telefonia foi construída a 300 metros do hospital Santa Tereza formando com o solo um ângulo de 60º, qual a distância da transmissão de sinal do topo da torre ao hospital? Considere $\cos 60° = \frac{1}{2}$.



Enquanto os conceitos de razão seno e cosseno surgiram dos estudos com cordas em Astronomia, a tangente apresenta outra origem.

A História da Matemática:

A tangente emergiu de necessidades práticas, como medir alturas e distâncias, para isto era muito comum o uso do *gnômon* (KENNEDY, 1992).

O *gnômon* chegou aos gregos pelos babilônios, porém também foi utilizado pelos egípcios antes de 1500 a.C.. O *gnômon* ilustrado na Figura 25 constitui-se de uma vareta de comprimento definido espetada perpendicularmente no chão, formando um ângulo de 90º, a partir da qual se observava o comprimento de sua sombra. Deste modo, utilizavam o conhecimento de ângulos relacionado ao comprimento da sombra ao longo do dia, e assim calculavam tabelas de sombras (COSTA, 1997; KENNEDY, 1992).

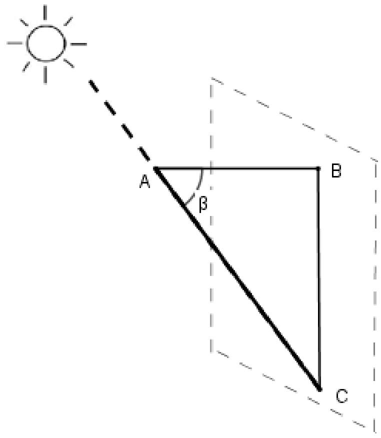
Figura 25 – *Gnômon.*

Fonte: http://clickeaprenda.uol.com.br/portal/mostrarConteudo.php?idPagina=27309

Os árabes, séculos depois, também se dedicaram as tabelas de sombras utilizando do *gnômon*, tanto para sombras verticais como horizontais. Com o *gnômon* na horizontal definiu a tangente (KENNEDY, 1992).

De acordo com o historiador Katz (2010), considerando o *gnômon* paralelo ao plano horizontal, ou seja, perpendicular ao plano apresentado na Figura 26 e representado por $\overline{AB}$, tem-se que $\overline{AC}$ constitui o raio do sol e $\overline{BC}$ a sombra do *gnômon*. A partir dessas definições, a "sombra vertical" $\overline{BC}$ foi estabelecida como tangente, sendo que elevações mais altas do Sol correspondiam a sombras mais longas. Este é o conceito histórico essencial de uma tangente.

Figura 26 - Representação da tangente por meio do *gnômon.*

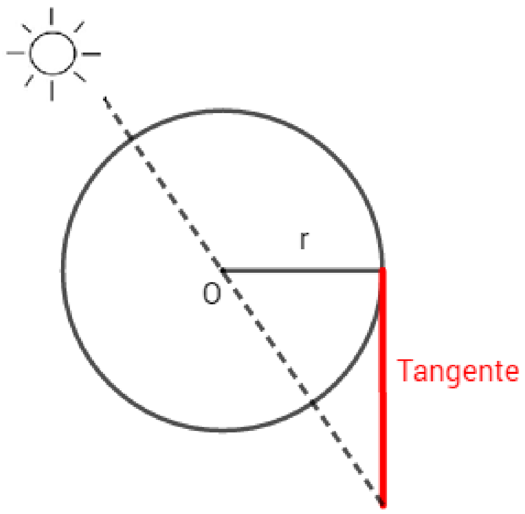


Em 1551 o matemático Rheticus definiu a tangente como uma razão entre seno e cosseno.

$$tg\beta = \frac{sen\beta}{cos\beta}$$

Thomas Fincke (1583) foi quem atribuiu o nome “tangente” a essa razão, além de outras contribuições como a projeção dessa razão no ciclo trigonométrico, em que a sombra vertical está situada ao longo da tangente à circunferência de raio unitário como na Figura 27 (KENNEDY, 1992).

Figura 27 - Tangente na circunferência.



✐ De acordo com o texto acima, responda:

9) Historicamente, o que se considerava como tangente?

____

____

____

10) Levando em consideração a definição da tangente pela razão entre seno e cosseno, considerando ainda que $\sin\theta = \frac{co}{h}$ e $\cos\theta = \frac{ca}{h}$, represente a tangente por meio dos catetos e/ou hipotenusa de um triângulo retângulo.

11) Com o auxílio do dicionário de língua portuguesa, descreva o significado da palavra tangente:

____

____

____

12) Relacionando o significado encontrado na questão anterior com a consideração de Thomas Fincke (1583) a respeito do termo tangente, explique o que é uma tangente.

____

____

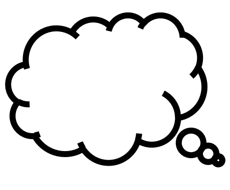
____

13) A cidade de Nova Iorque é uma das maiores metrópoles do mundo, a qual exerce um impacto significativo sobre o comércio, finanças, mídia, arte, moda, pesquisa, tecnologia, educação e entretenimento de todo o planeta. Sendo a cidade mais populosa dos Estados Unidos também se destaca pelos altos edifícios. Atualmente, o edifício mais alto da cidade (e de todo o Ocidente) é o *One World Trade Center* (Figura 15) que possui 104 andares e 542 metros de altura (contando com sua antena). Sua construção começou em 2006 e terminou em 2013, sendo ela um marco que mostra o orgulho da recuperação nova-iorquina após o ataque terrorista ocorrido em 11 de setembro de 2001, que resultou na queda das Torres Gêmeas do *World Trade Center*. (Informação disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Nova_Iorque).

Figura 28 - Imagem do *One World Trade Center* em Nova York (EUA)

(Disponível em: http://www.louisberger.com/our-work/project/world-trade-center-redevelopment-new-york-ny-us)

Com base nas informações acima e considerando que em um dia de verão, às 10 horas da manhã, o prédio produz uma sombra formando um ângulo de 30º com a vertical, calcule qual deveria ser o comprimento da sombra do prédio *One World Trade Center* neste horário do dia caso não houvesse nenhuma outra construção ao seu redor. Como sugestão, desenhe a situação problema e anote as informações mencionadas antes da realização dos cálculos. Considere $tg\ 30º = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Refletindo

1) As origens das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente são iguais ou diferentes? Comente.

____
____
____
____
____

2) No que se refere a aplicações das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, as mesmas possuem semelhanças e diferenças entre si. Comente as características que você pode observar ao longo das atividades.

____
____
____
____
____

3) Conhecer a origem histórica foi importante para compreender melhor o conceito de cada razão trigonométrica? Comente.

____
____
____
____
____

Após apresentação da atividade 3, o Quadro 6 apresenta a Ficha Explicativa das questões que compõe esta atividade:

Quadro 6 - Ficha Explicativa da Atividade 3.

Atividade 3: Razões trigonométricas
Objetivo da Atividade: Contribuir, de acordo com a metodologia de Ensino Histórico-Epistemológica, para uma aprendizagem significativa dos alunos sobre as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente), na qual permite:

- apresentar formalizações algébricas adequadas para cada razão trigonométrica estudada; - utilizar das razões trigonométricas para resolver as situações problemas. - refletir sobre o conteúdo estudado.		
Identificação (Atividade:Questão)	**Objetivos**	**Respostas aceitáveis**
AT3: Q1 (*a, b, c, d*)	Nesta questão os alunos devem identificar os elementos da circunferência relacionando com o quadrilátero inscrito na Figura 21. Em consequência, identificar o triângulo retângulo formado com o ângulo de 90º e o lado correspondente à hipotenusa, denominada como "corda" da circunferência. Estas características são importantes para construção da razão seno.	a) $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ b) $\overline{AB},\ \overline{BC},\ \overline{CD}$ e $\overline{AD}$ c) 90º. d) $hip^2 = cat^2 + cat^2$ $\overline{AB}^2 = \overline{A0}^2 + \overline{BO}^2$ $\overline{AB}^2 = 1^2 + 1^2$ $\overline{AB} = \sqrt{2}$
AT3: Q2	Com base na resolução da Q1c e nas informações históricas sobre a razão seno, os alunos devem identificar o valor do ângulo referente à meia corda indiana, na qual basta dividir 90º por 2.	45º
AT3:Q3	Com base na Q1d e na razão seno demonstrada, identificar quanto vale o seno de 45º, ou seja, com o valor obtido na Q1d dividir por 2, representando a meia corda (seno). Destacar para os alunos as "caixas de notas", pois elas apresentam observações importantes para o estudo da razão seno.	$sen45º = \frac{corda}{2} = \frac{co}{hip}$ $sen45º = \frac{\sqrt{2}}{2}$
AT3: Q4	A partir do conhecimento construído por meio da História da Matemática, o objetivo desta questão é possibilitar que os alunos identifiquem a aplicação da razão seno em situações	$sen45º = \frac{co}{hip}$ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{109{,}45}{hip}$

	problemas presentes no dia a dia, e a resolva obtendo o valor desejado.	$hip = 154{,}7$ Resposta: A distância da pessoa ao mirante é de 154,7 metros.
AT3: Q5	A partir dos estudos do seno surgiu o cosseno, como seno complementar. Esta é uma informação histórica importante para os alunos compreenderem o conteúdo. Deste modo, esta questão tem por finalidade evidenciar que seno e cosseno são complementares (juntos formam ângulo de 90º), além de possibilitar aos alunos identificar os ângulos para cosseno a partir dos valores para seno.	a) 60º b) 45º c) 30º d) 54º
AT3: Q6	Ao identificar os ângulos do cosseno, os alunos podem determinar seus valores correspondentes. Tendo em vista que o cosseno é complementar ao seno, os valores do cosseno se repetem em relação aos do seno, porém, para ângulos diferentes. Deste modo, esta questão possibilita aos alunos compreenderem o processo de construção da tabela dos ângulos notáveis, ao invés de decorá-las.	$cos30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 45º = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 60º = \frac{1}{2}$
AT3: Q7	Os alunos devem formalizar a expressão algébrica para a razão cosseno a partir da razão seno.	$cos\beta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$
AT3: Q8	O objetivo para esta questão é que a partir do conhecimento construído por meio da História da Matemática, os alunos identifiquem a aplicação da razão cosseno em situações	$cos60º = \frac{ca}{hip}$ $\frac{1}{2} = \frac{300}{hip}$

	problemas presentes no dia a dia, e a resolva obtendo o valor desejado.	$hip = 600$ Resposta: A distância da transmissão de sinal do topo da torre ao hospital é de 600 metros.
AT3: Q9	Esta questão se refere ao estudo da razão tangente. Para que possa ser respondida, se faz necessário à leitura e compreensão das informações históricas apresentadas na “caixa da História da Matemática”.	Considerava-se como tangente a sombra do *gnômon*.
AT3: Q10	Dada à informação histórica que a tangente foi definida como a razão entre seno e cosseno, os alunos devem representar a razão seno e cosseno em termos dos catetos oposto e adjacente, respectivamente. Esta questão também possibilita diferenciar tangente de seno e cosseno.	$tg\theta = \frac{sen}{cos}$ $tg\theta = \frac{\frac{co}{hip}}{\frac{ca}{hip}}$ $tg\theta = \frac{co}{ca}$
AT3: Q11	Solicitar aos alunos que pesquisem no dicionário manual, ou, se for viável, no dicionário online o significado da palavra tangente.	“Linha que toca outra linha ou superfície num só ponto” (BUENO, 1996).
AT3: Q12	Relacionar as informações históricas e do dicionário e explicar com suas palavras o que compreendeu como tangente.	Resposta pessoal.
AT3: Q13	A partir do conhecimento construído por meio da História da Matemática, esta questão tem por objetivo possibilitar que os alunos identifiquem a aplicação da razão tangente em	$tg30º = \frac{co}{ca}$ $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{co}{542}$

	situações problemas presentes no dia a dia, além de resolvê-la obtendo o valor desejado.	$co = 312,92$ Resposta: O comprimento da sombra do prédio será de 312,92 metros.
AT3: RF1	Com base nos estudos da História da Matemática os alunos devem descrever as diferenças e igualdades que observaram ao estudar a origem das razões trigonométricas.	Resposta pessoal.
AT3: RF2	Nesta questão os alunos devem refletir a respeito das aplicações das razões trigonométricas e descrever as diferenças e semelhanças que observaram entre elas durante a o estudo da Sequência Didática.	Resposta pessoal.
AT3: RF3	Considerando a aprendizagem por meio da História da Matemática os alunos devem realizar uma reflexão e descrever de que forma esta metodologia contribuiu para aprendizagem das razões trigonométricas.	Resposta pessoal.

Fonte: Os autores (2018).

A atividade 3 foi a atividade mais extensa desta Sequência Didática, para sua aplicação o Quadro 7 apresenta orientações:

Quadro 7 - Orientações para a Atividade 3.

Atividade 3: Razões trigonométricas	
Duração:	3 horas/aulas.
Conhecimento matemático envolvido:	• Elementos do triângulo retângulo; • Teorema de Pitágoras; • Ângulos; • Razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente).

Papel do professor:	Orientar, mediar e auxiliar o processo de construção do conhecimento.
Atividade:	Sugere-se que as resoluções sejam individuais. Contudo, as discussões a respeitos do “Refletindo” em grupo.
Materiais:	• Atividade impressa. • Dicionário da Língua Portuguesa.
Estratégia de ação:	Nesta atividade é importante que os alunos compreendam as origens históricas das razões trigonométricas. Por esta razão, é necessário que seja dada ênfase às leituras da “caixa da História da Matemática”. Sugere-se que a leitura seja dinâmica entre o professor e aos alunos. Vale ressaltar também as informações escritas nas demais caixas, pois contribuem para a compreensão do conteúdo. Deve se seguir os passos na ordem proposta pela Sequência Didática para que o aluno compreenda as semelhanças e diferentes entre as razões trigonométricas. Ademais, durante as resoluções o professor pode auxiliar no processo, porém evitar dar as respostas as questões.
Avaliação:	As avaliações referentes a SD deveram ser analisadas por um todo em diversos aspectos relevantes, visto que toda e qualquer atividade lhe serão atribuídas valores de acordo com os quais o professor determinar, devido que o sistema necessita de notas. Para isso elencamos alguns critérios a serem avaliados, como: Sala de aula: • Participação do aluno durante as discussões e leituras históricas; • Comprometimento em realizar as tarefas. Respostas na SD: • O aluno apresentou o desenvolvimento dos cálculos e fórmulas, quando necessário. Podendo estar corretos ou não; • O aluno demonstrou tentativas de responder as questões; Cujo objetivo não esta em atribuir notas para quem soube ou não responder, mas sim em coletar informações dos alunos a fim de analisar sua aprendizagem e a eficiência do material.

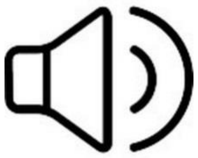
Fonte: Os autores (2018).

3.1.4 Atividade 4: Ciclo Trigonométrico

Até o século XVIII a Trigonometria era representada em triângulos retângulos, os quais se limitam à 90°. Neste sentido, a atividade 4 trata a respeito do ciclo trigonométrico, possibilitando trabalhar com ângulos maiores que 90º:

ATIVIDADE 4

"Ciclo trigonométrico"



Antes de iniciar nosso estudo sobre ciclo trigonométrico vamos relembrar/estudar o número π e conhecer uma nova unidade de medida.

?

Você sabe de onde vem o π?

A História da Matemática:

No papiro Rhind (1650 a.C.) além de apresentar alguns conhecimentos trigonométricos, haviam estudos sobre estimativas do número $\boldsymbol{\pi}$. Desde a antiguidade o $\boldsymbol{\pi}$ já era considerado como uma constante, definida pela razão entre comprimento da circunferência e diâmetro:

$$\pi = \frac{\textit{comprimento da circunferência}}{\textit{diâmetro}}$$

Seu valor foi estudado por diversos matemáticos ao longo do tempo, na qual se aproximava do valor que hoje conhecemos (3,1415...), contendo cada vez mais algarismo. Para se ter uma ideia, em 1984 nos Estados Unidos, encontrou-se mais de dez milhões de algarismo exatos para o número $\boldsymbol{\pi}$.

Os motivos que levam as pessoas ao longo dos anos a se esforçarem para calcular $\boldsymbol{\pi\pi}$ com centenas ou milhares de algarismos decimais seriam: o "Livro dos Recordes de Guines" e testes com computadores (fazer as máquinas calcularem e comparar resultados cada vez mais precisos).

Apesar disso, a letra $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\pi}$ passou a ser adotada definitivamente como símbolo para este valor somente a partir de 1737 diante dos estudos de Leonhard Euler (1707-1783).

(Informações históricas disponíveis em: https://www.coladaweb.com/matematica/numero-pi).

Vamos comprovar o valor de π.

1) Sabendo que o π é a razão entre comprimento da circunferência e diâmetro, meça o comprimento da circunferência e diâmetro dos objetos dados:

<u>Objeto 1</u>

Comprimento da circunferência: ______________
Diâmetro: ______________

<u>Objeto 2</u>

Comprimento da circunferência: ______________
Diâmetro: ______________

2) Com as medidas obtidas na questão 1, calcule a razão entre essas medidas:

Objeto 1:

Objeto 2:

3) O valor obtido é aproximado de π (3,14...)?

( ) sim ( ) não

4) O que podemos concluir com relação a uma circunferência e o número $\boldsymbol{\pi}\pi$?

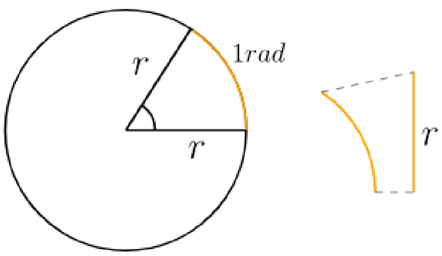
A representação de ângulos por uma nova unidade de medida denominada <u>radianos</u>.

A História da Matemática:

Leonhard Euler foi um estudioso que marcou a História com valiosas contribuições, dentre as quais destacam-se os estudos das Funções Trigonométricas. Em razão disso, Euler denominou de **ciclo trigonométrico** uma circunferência de raio unitário com centro no plano cartesiano de coordenadas "x" e "y" e utilizou como unidade de medida **os radianos** (OLIVEIRA, 2014).

Considerando que até o século XVIII a trigonometria era representada em triângulos retângulos, os quais se limitam à 90°, Euler utilizou-se de um ciclo trigonométrico, de modo a trabalhar com ângulos maiores que 90º. A unidade de medida radianos foi fundamental para essa "passagem" do triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico, pois os radianos compreendem medidas angulares e medidas lineares (BOYER, 2012; OLIVEIRA, 2014; QUINTANEIRO, GIRALO, PINTO, 2010), conforme pode-se observar na Figura 29.

Figura 29 - Representação do radiano como medida angular e medida linear.



Fonte: http://www.matika.com.br/radianos/definicao-do-radiano

Nota: O termo radiano (radian) foi impresso pela primeira vez somente em (1873) por James Thonson, provavelmente inspirado pela palavra radius (raio) (Quintaneiro, Giral, Pinto, 2010).

Com base na geometria plana, o comprimento de uma circunferência qualquer é dado por:

$$c = 2\pi r$$

sendo “r” o valor do raio da circunferência.

Com relação a unidade de medida ângulo utilizada em circunferências, sabe-se também, com base na geometria plana, que uma circunferência completa possui 360º. Portanto, considerando raio unitário e relacionando essas duas informações, podemos afirmar que:

$$c = 2\pi r$$
$$c = 2\pi 1$$
$$c = 2\pi$$

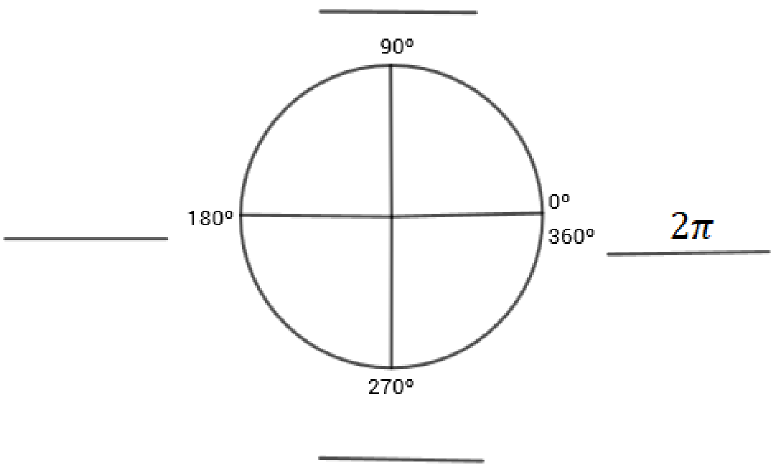
ou seja

$$360º = 2\pi \; radianos$$

Nota: Fórmulas como a do comprimento da circunferência, são muito úteis! Imagine você medir com barbante o comprimento da circunferência de um anel? Simples, não! Mas agora imaginei você medir com barbante o comprimento da circunferência de um estádio de futebol, inviável não acha? Por isso as fórmulas facilitam a Matemática.

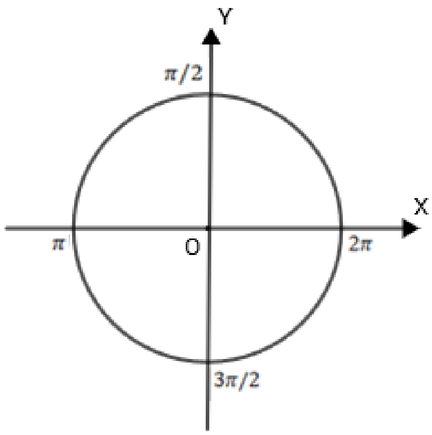
✐ De acordo com as informações, responda:

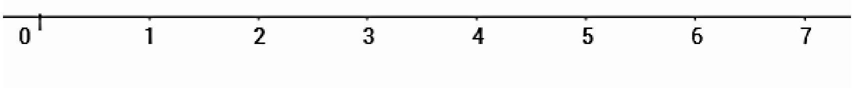
5) A circunferência da figura abaixo está subdivida e representada por alguns valores em graus. Considerando que uma volta completa de 360º equivale a $2\pi \; radianos,$ os ângulos apresentados na figura equivalem a:



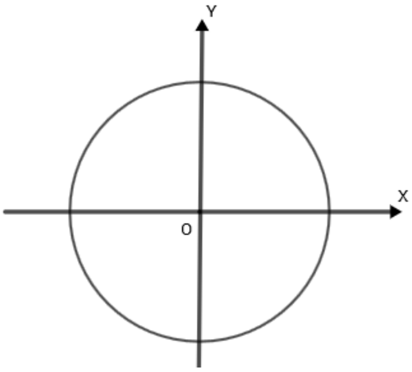
6) "Os radianos compreendem medidas angulares e medidas lineares", como demonstrado na Figura 29. A seguir, temos um ciclo trigonométrico com algumas medidas angulares em radianos. Represente essas medidas angulares em seus respectivos valores lineares na semi reta dada.

(Obs.: Para facilitar, com o auxílio da calculadora, encontre os valores em decimais).





7) Euler definiu ciclo trigonométrico a partir do raio unitário. Desta forma, os eixos xe y correspondem ao valor do raio. Indique quais são os valores dos eixos x e y nos pontos de interseção com a circunferência:
(Obs.: Lembrando que os eixos possuem valores positivos e negativos).



Portanto, o eixo x compreende valores numéricos de ______ à _______, e o eixo y compreende valores numéricos de ______ à _______.

Nota: O raio unitário foi muito importante para o desenvolvimento da Trigonometria, veja o trecho histórico a seguir.

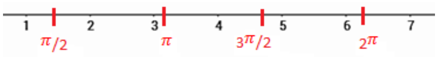
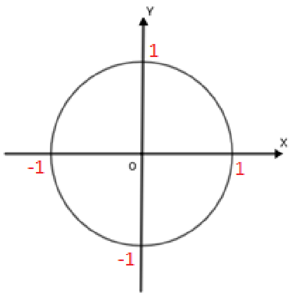
A História da Matemática:

Segundo Oliveira (2014) a articulação da Trigonometria de arcos e cordas com a Trigonometria de razões de triângulo retângulos só foi possível com a adoção do raio como unidade de medida, ou seja, raio unitário, pois até então era considerado por diversos matemáticos diferentes medidas de raio ocasionando diferentes valores para o seno (GOMES, 2011).

Para melhor compreensão da atividade 4 apresentada acima, o Quadro 8 corresponde a uma Ficha Explicativa da mesma:

Quadro 8 - Ficha Explicativa da Atividade 4.

Atividade 4: Ciclo trigonométrico		
Objetivo da Atividade: Contribuir, de acordo com a metodologia de Ensino Histórico-Epistemológica, para uma aprendizagem significativa dos alunos sobre o ciclo trigonométrico, o qual permite: - compreender, por meio de materiais manipuláveis, a razão do π ser utilizado na circunferência; - relacionar os graus com radianos no ciclo trigonométrico; - compreender e demonstrar que os radianos podem ser representados de forma angular e linear; - identificar os valores numéricos para os eixos "*x*" e "*y*" no ciclo trigonométrico.		
Identificação (Atividade:Questão)	**Objetivos/comentários**	**Respostas aceitáveis**
AT4: Q1	Identificar o comprimento e diâmetro da circunferência do objeto circular, medindo com o auxílio do barbante e anotar os valores na atividade.	Resposta pessoal.
AT4: Q2	Calcular a razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência, e anotar os resultados obtidos.	Resposta pessoal.
AT4: Q3	Verificar se os valores obtidos na questão 2 é aproximo de π.	Sim ou não.
AT4: Q4	Com base nas questões anteriores, os alunos devem refletir a respeito do valor de π e sua relação com a circunferência.	Independentemente do tamanho do objeto, o número π é uma constante dada pela razão entre o comprimento e diâmetro da circunferência.
AT4: Q5		

	Representar em radianos os graus do ciclo trigonométrico dado. Para isto, é recomendado orientar os alunos a realizarem regra de três simples para encontrar os valores em radianos.	$90° = \frac{\pi}{2}$ $180° = \boldsymbol{\pi}$ $270° = \frac{3\pi}{2}$
AT4: Q6	Dados os valores em radianos no ciclo trigonométrico, os alunos devem representar essas medidas angulares em seus respectivos valores lineares, ou seja, na reta numérica.	
AT4: Q7	Sabendo que o raio equivale a 1, identificar os valores dos eixos nos pontos de intersecção com a circunferência.	 O eixo "*x*" compreende valores numéricos de -1 à 1, e o eixo "*y*" compreende valores numéricos de -1 à 1.

Fonte: Os autores (2018)

O Quadro 9 apresenta orientações para a aplicação da atividade 4:

Quadro 9 - Orientações para a Atividade 4.

Atividade 4: Ciclo trigonométrico	
Duração:	2 horas/aula.
Conhecimento matemático envolvido:	• Fração; • Unidades de medidas em graus e radianos no ciclo trigonométrico; • Regra de três simples; • Plano cartesiano.
Papel do professor:	Orientar, mediar e auxiliar o processo de construção do conhecimento.

Atividade:	Em grupo a atividade manual e individual as representações.
Materiais:	• Atividade impressa; • Barbante; • Tesoura; • Objetos com superfícies circulares (estes objetos podem ser levados pelo professor ou utilizar dos materiais escolares circulares que os alunos possuírem).
Estratégia de ação:	Ao iniciar a atividade questionar os alunos a respeito da "caixa de pergunta" e ler com eles a "caixa da História da Matemática". As questões 1, 2, 3 e 4 podem ser realizadas em grupos, pois possibilita a discussão e reflexão a respeito do tema. Após realizar essas questões, os alunos compreenderam o significado do π na circunferência e a partir de então é introduzido a nova unidade de medida, os radianos. Na questão 5 é necessário os alunos realizem cálculos por meio da regra de três e assim descobriram os demais valores em radianos. Tendo que vista que a questão 5 responde a questão 6, é necessário que esta questão seja entregue aos alunos em folha separada da questão 5. Por fim, na questão 7 é importante que evidencie o raio unitário, conforme proposto na própria questão, na "caixa de nota" e na "caixa da História da Matemática".
Avaliação:	As avaliações referentes à SD deveram ser analisadas por um todo em diversos aspectos relevantes, visto que toda e qualquer atividade lhe serão atribuídas valores de acordo com os quais o professor determinar, devido que o sistema necessita de notas. Para isso elencamos alguns critérios a serem avaliados, como: Sala de aula: • Participação do aluno durante as discussões e leituras históricas; • Comprometimento em realizar as tarefas; • Socialização entre os colegas para realização das tarefas. Respostas na SD: • O aluno apresentou o desenvolvimento dos cálculos e fórmulas, quando necessário. Podendo estar corretos ou não; • O aluno demonstrou tentativas de responder as questões; Cujo objetivo não esta em atribuir notas para quem soube ou não responder, mas sim em coletar informações dos alunos a fim de analisar sua aprendizagem e a eficiência do material.

Fonte: Os autores (2018)

3.1.5 Atividade 5: Funções Trigonomátricas no Ciclo Trigonométrico

Durante a atividade 4 uma nova unidade de medida foi definida: os radianos, os quais possibilitaram à Trigonometria assumir medidas em números reais. Neste sentido, a atividade 5 trata das Funções Trigonométricas no Ciclo Trigonométrico:

ATIVIDADE 5

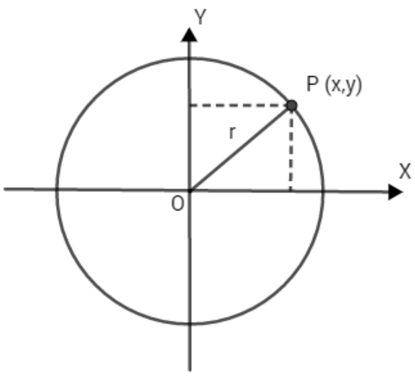
"Funções Trigonométricas no ciclo trigonométrico"

A História da Matemática:

Por meio de estudos com a unidade de medida radianos, Euler definiu as Funções Trigonométricas. Até então a Trigonometria era baseada em medidas de ângulos, contudo com os radianos pôde assumir medidas em números reais (COSTA 1997).

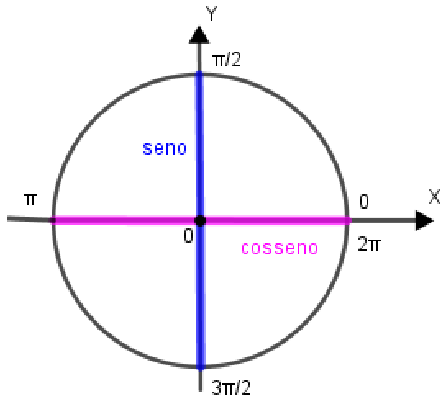
Para isto, Euler considerou um ponto $P(x, y)$ no ciclo trigonométrico, cujas coordenadas x e y satisfaçam a equação: $x^2 + y^2 = 1$.

Figura 30 - Relação entre ciclo trigonométrico e plano cartesiano.



A partir de então realizou a correspondência entre um ponto na circunferência com um número no eixo do plano cartesiano. Deste modo, definiu a função seno e função cosseno de um número real das coordenadas x e y, sendo o cosseno correspondente ao eixo x e seno correspondente ao eixo y, não sendo mais necessário recorrer a ângulos (COSTA 1997; OLIVEIRA, 2013).

Figura 31 - Função seno e função cosseno no ciclo trigonométrico.



Euler ainda considerou a função periódica para cada volta completa na circunferência, ou seja, 2π, definiu as funções seno e cosseno como periódicas em 2π (OLIVEIRA, 2013).

Com o auxílio do software GeoGebra[2] podemos observar a correspondência entre o valor em radianos/graus com os valores numéricos nos eixos "x" e "y".

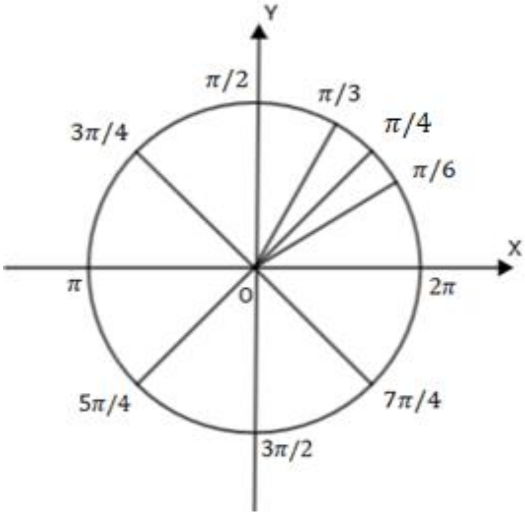
(Software GeoGebra disponível em: https://www.geogebra.org/m/EY2CrqUB

Nota: com o auxílio do GeoGebra, faça uma breve discussão a respeito dos valores da função seno e função cosseno.

[2] O software GeoGebra dispõe do ciclo trigonométrico já construído. Caso não possua familiaridade com o mesmo, propomos para apresentação aos alunos, o link disponível em https://www.geogebra.org/m/JPMq8Kt6#material/jzdtpCHz.

✐ De acordo com os relatos históricos e uso do GeoGebra, responda:

1) Sabendo que os valores para a função seno são representados no eixo “y” e os valores para a função cosseno representados no eixo “x”, faça a correspondência entre valores angulares e radianos. Posteriormente, relacione os valores em radianos com os números nos eixos x e y do ciclo trigonométrico, indicando os valores na tabela abaixo:

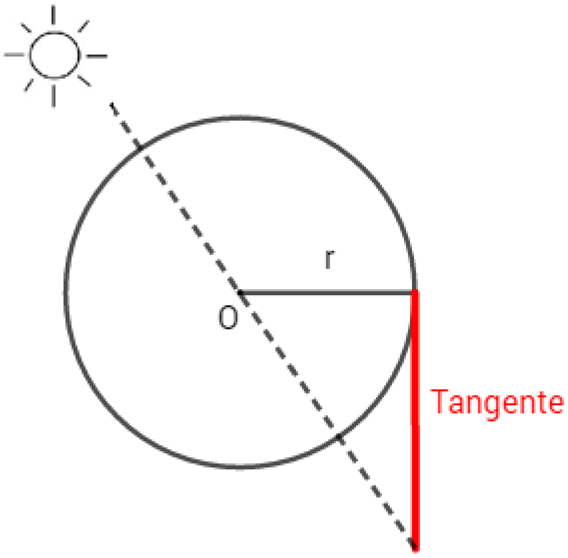


Posição angular (graus)	Posição angular (radianos)	FUNÇÃO SENO	FUNÇÃO COSSENO
0	0		
30	$\pi/6$		
45	$\pi/4$		
60	$\pi/3$		
90	$\pi/2$		
135	$3\pi/4$		
180	π		
225	$5\pi/4$		
270	$3\pi/2$		
315	$7\pi/4$		
360	2π		

A História da Matemática:

Além das funções seno e cosseno, Euler também definiu a função tangente. Contudo, historicamente destaca-se que Thomas Fincke (1583) foi quem contribui como sua projeção no ciclo trigonométrico ao considerar que a sombra vertical está situada ao longo da tangente à circunferência de raio unitário como demonstrado na Figura 32 (KENNEDY, 1992).

Figura 32 - Tangente na circunferência.



Nota: *com o auxílio do GeoGebra, faça uma breve discussão e análise a respeito do comportamento da função tangente no ciclo trigonométrico.*

A função tangente[3] no ciclo trigonométrico é paralela ao eixo "y".

2) Com o auxílio do GeoGebra, atribua os valores da função tangente para:

Posição angular (radianos)	FUNÇÃO TANGENTE
0	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$\pi/2$	
$3\pi/4$	
π	
$5\pi/4$	
$3\pi/2$	
$7\pi/4$	
2π	

Refletindo...

1) Sobre as Funções Trigonométricas no ciclo trigonométrico, é possível encontrar o valor de $\frac{13\pi}{6}$, ou seja, de 390º? Comente:

____

____

____

[3] A respeito da função Tangente consulte https://www.geogebra.org/m/JPMq8Kt6#material/bkEGjj4h

2) E para 4π, ou seja, 720º? Comente:

____

____

____

____

3) Ao observar as representações pelo software GeoGebra podemos identificar que que o eixo $x$representa a função ______________, o eixo y representa a função______________, e a função ______________ é paralela ao eixo _______.

Com o objetivo de contribuir para uma aprendizagem significativa a respeito das Funções Trigonométricas, o Quadro 10 apresenta uma Ficha Explicativa da atividade 5 e o Quadro 11 orientações aos professores:

Quadro 10 - Ficha Explicativa da Atividade 5.

<table>
<tr><th colspan="3">Atividade 5: Funções Trigonométricas no ciclo trigonométrico</th></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivo da Atividade: Contribuir, de acordo com a metodologia de Ensino Histórico-Epistemológica, para uma aprendizagem significativa dos alunos sobre as Funções Trigonométricas no ciclo trigonométrico, na qual permite:
- usar o software GeoGebra;
- identificar por quais eixos a função seno, cosseno e tangente são representadas no ciclo trigonométrico;
- identificar os valores das Funções Trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no ciclo trigonométrico.</td></tr>
<tr><td>Identificação (Atividade:Questão)</td><td>Objetivos</td><td>Respostas aceitáveis</td></tr>
<tr><td>AT5: Q1</td><td>Na “caixa da História da Matemática” foi descrito que Euler identificou os valores para as funções seno e cosseno no ciclo trigonométrico por meio de coordenadas. Nesta questão, baseada nas informações históricas, os alunos devem representar os valores das funções seno e cosseno no ciclo trigonométrico fazendo</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>correspondência, por pontilhados, com as coordenadas e os radianos. Os valores numéricos dos eixos são identificados com a apresentação do ciclo trigonométrico no software GeoGebra.</td>
<td>
<table>
<tr><th>FUNÇÃO SENO</th><th>FUNÇÃO COSSENO</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>0,8</td></tr>
<tr><td>0,7</td><td>0,7</td></tr>
<tr><td>0,8</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0,7</td><td>-0,7</td></tr>
<tr><td>0</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>-0,7</td><td>-0,7</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>-0,7</td><td>0,7</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>AT5: Q2</td>
<td>Com o uso do software GeoGebra os alunos devem representar os valores numéricos para a função tangente no ciclo trigonométrico, de acordo com os radianos dados.</td>
<td>
<table>
<tr><th>FUNÇÃO TANGENTE</th></tr>
<tr><td>0</td></tr>
<tr><td>0,5</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>1,7</td></tr>
<tr><td>-</td></tr>
<tr><td>-1</td></tr>
<tr><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>-</td></tr>
<tr><td>-1</td></tr>
<tr><td>0</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>AT5: RF1</td>
<td>Os alunos devem refletir sobre o valor correspondente em graus/radianos para uma volta completa no ciclo trigonométrico. Ademais, compreender e analisar de que forma podemos identificar valores para as funções com graus/radianos superiores a uma volta completa no ciclo trigonométrico.</td>
<td>Sim, porém é necessário dar início novamente a uma volta no ciclo até obter 390º, ou seja, percorrer até o ângulo de 30º.</td>
</tr>
<tr>
<td>AT5: RF2</td>
<td>Esta questão possui os mesmos objetivos que a questão RF1, porém busca enfatizar que 4π corresponde a duas voltas completas na circunferência.</td>
<td>Sim, pois este valor corresponde a duas vezes o 2π, ou seja, dar duas voltas completas no ciclo trigonométrico.</td>
</tr>
<tr>
<td>AT5: RF3</td>
<td>Diante do estudo realizado sobre as Funções Trigonométricas, esta questão</td>
<td>Cosseno; seno; tangente; y.</td>
</tr>
</table>

	busca enfatizar quais eixos representam as funções seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico.	

Fonte: Os autores (2018)

Quadro 11 - Orientações para a Atividade 5.

Atividade 5: Funções Trigonométricas no ciclo trigonométrico	
Duração:	2 horas/aula.
Conhecimento matemático envolvido:	• Ângulos; • Radiano; • Plano cartesiano; • Ciclo trigonométrico; • Função seno, cosseno e tangente.
Papel do professor:	Orientar, mediar e auxiliar o processo de construção do conhecimento.
Atividade:	Individual ou em grupos, depende da disponibilidade de computadores.
Materiais:	• Atividade impressa; • Computador (software GeoGebra)
Estratégia de ação:	As “caixas da História da Matemática” são muito importantes para a resolução das questões. A leitura de forma dinâmica entre professor e alunos pode facilitar a compreensão dos alunos sobre o conteúdo. Para a resolução, também é importante o uso de computadores. Neste sentido, se a escola dispor de laboratório de informática os alunos podem utilizá-lo para a realização da atividade, mas se a escola não dispor o professor pode utilizar um computador para demonstrar aos alunos com o auxílio do Data Show. Importante que o professor e alunos explorem os recursos desse software, articulando os comandos possíveis. A Sequência Didática dispõe na “caixa da de uso de internet ou computador” o link para ser baixado o software com o ciclo trigonométrico já construído. Caso o professor não possua familiaridade com o software, foram disponibilizados link com representação das Funções Trigonométricas no ciclo trigonométrico.
Avaliação:	As avaliações referentes à SD deveram ser analisadas por um todo em diversos aspectos relevantes, visto que toda e qualquer atividade lhe serão atribuídas valores de acordo com os quais o professor determinar, devido que o sistema necessita de notas. Para isso elencamos alguns critérios a serem avaliados, como: Sala de aula:

	• Participação do aluno durante as discussões e leituras históricas; • Comprometimento em realizar as tarefas. Respostas na SD: • O aluno apresentou o desenvolvimento dos cálculos e fórmulas, quando necessário. Podendo estar corretos ou não; • O aluno demonstrou tentativas de responder as questões; Cujo objetivo não esta em atribuir notas para quem soube ou não responder, mas sim em coletar informações dos alunos a fim de analisar sua aprendizagem e a eficiência do material.

Fonte: Os autores (2018).

3.1.6 Atividade 6: Representação Gráfica das Funções Trigonométricas

A última atividade da Sequência Didática corresponde a representação gráfica das Funções Trigonométricas:

ATIVIDADE 6

"Representação gráfica das Funções Trigonométricas"

Em consequência do ciclo trigonométrico é possível estudar os comportamentos em gráficos das funções (OLIVEIRA, 2013).

?

O que é representação gráfica de funções?

A História da Matemática:

As representações gráficas são utilizadas para ilustrar o comportamento de uma grandeza que depende de outra(s) grandeza(s), proporcionando uma melhor visão sobre acontecimentos/fenômenos. O plano para representar posições recebeu o nome de plano cartesiano em homenagem a René Descartes, que em 1637 teve a ideia de tratar as curvas geométricas por meio de expressões algébricas, originando assim a Geometria Analítica (BOYER, 2012).

O tratamento analítico das Funções Trigonométricas está no livro *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748), considerado a obra chave da Analise Matemática, a qual a Trigonometria atualmente é inserida. (COSTA, 1997).

As representações gráficas das Funções Trigonométricas, como vistas, são periódicas, denominadas de: senóide (função seno), cossenóide (função cosseno) e tangentóide (função tangente).

Com o auxílio do software GeoGebra podemos observar as representações gráficas das Funções Trigonométricas[4].

Nota: no GeoGebra escreva no campo de "entrada" as funções:

$$f(x) = sen(x)$$
$$f(x) = \cos(x)$$
$$f(x) = tg(x)$$

e observe seus respectivos comportamentos.

[4] Caso não possua familiaridade com o software GeoGebra, propomos o tutorial a respeito do Ciclo Trigonométrico e as Funções Seno, Cosseno e Tangente disponível em https://www.geogebra.org/m/zYSxTGjF ou ainda cada função individualmente, disponível em https://www.geogebra.org/m/JPMq8Kt6

✐ Com o auxílio do software GeoGebra, responda:

1) Dadas as Funções Trigonométricas a seguir, observe as representações gráficas no software GeoGebra e anote quais mudanças ocorreram na comparação entre os gráficos das funções:

a) $f(x) = \boldsymbol{s}en(3x)$; $y = 3sen(x)$

____

____

b) $(x) = 1 + \ sen(x)$; $y = sen(x+1)$

____

____

c) $(x) = cos(x+3)$; $y = 3 + \cos(x)$

____

____

d) $(x) = \cos(2x)$; $y = 2cos(x)$

____

____

e) $(x) = tg(x)$; $f(x) = 4\,tg(x)$

____

____

f) $(x) = (x+2)$; $f(x) = 2 + tg(x)$

____

____

As funções periódicas possuem aplicação em diversas áreas, como:

> [...] música (a teoria da ressonância afirma a natureza matemática nas relações harmônicas), acústica (no estudo dos meios de propagação do som), eletricidade (no estudo do eletromagnetismo, equações matemáticas preveem ondas eletromagnéticas), mecânica (no movimento circular uniforme), entre outras (OLIVEIRA, 2013, p. 64-65).

A seguir veremos um exemplo de aplicação.

Em maio de 2017 o site "O povo" publicou uma notícia sobre uma novidade tecnológica, as "Tatuagens sonoras".

Para ter acesso a notícia na integra acesse o site: https://www.opovo.com.br/noticias/tecnologia/2017/05/tatuagem-de-onda-sonora-podera-reproduzir-o-audio-correspondente.html

O POVO online 20 ANOS | Notícias | Esportes | Divirta-se | Vida & Arte | Vídeos | ASSINE

Tecnologia

REALIDADE AUMENTADA

Tatuagem de onda sonora poderá reproduzir o áudio correspondente; entenda

Tudo acontece através de um aplicativo que identifica as ondas sonoras tatuadas e reproduz o som que elas representam

18:09 | 21/05/2017 3306 0

Uma nova tecnologia para tatuagens permitirá que elas possam ser ouvidas e irem além de ser apenas algo visual. Tudo acontece através de um aplicativo que identifica as ondas sonoras tatuadas e reproduz o som que elas representam. O app deve ser lançado no próximo mês, em junho de 2017, segundo informações da própria empresa Skin Motion.

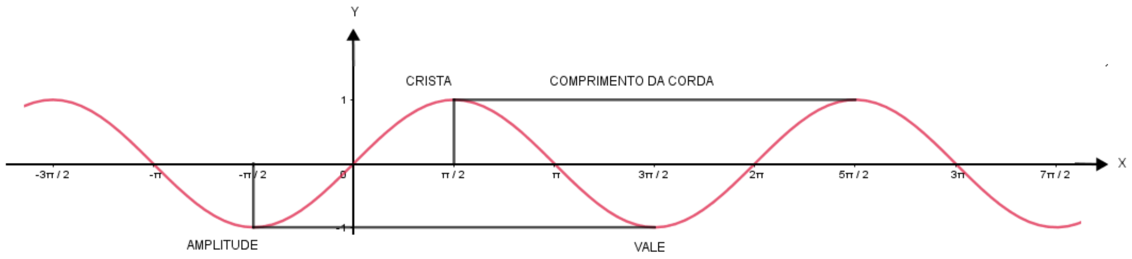
Para poder usufruir da novidade, a pessoa precisará comprar o aplicativo "**Skin Motion**" e fazer o upload de um áudio com até um minuto de duração (é possível utilizar músicas, vozes, barulhos e sons diversos ou até uma combinação de tudo isso). A partir disso, o software gerará a imagem da onda sonora correspondente e com isso é só tatuar com um profissional certificado pela empresa que saberá os parâmetros técnicos para aplicar e customizar sem prejudicar a funcionalidade da onda sonora.

Se tudo for feito adequadamente, é só apontar a câmera do celular para a tatoo e o app identificará a imagem da tatuagem, que já tinha sido feito o upload para os servidores da empresa, e reproduzira o áudio vinculado a ela. Até o momento, o Brasil é o segundo país, com exceção dos EUA, com mais artistas que aplicaram para se tornarem tatuadores certificados da empresa. São 282 profissionais enquanto no primeiro país, o México, são 753.

Ondas sonoras e as Funções Trigonométricas

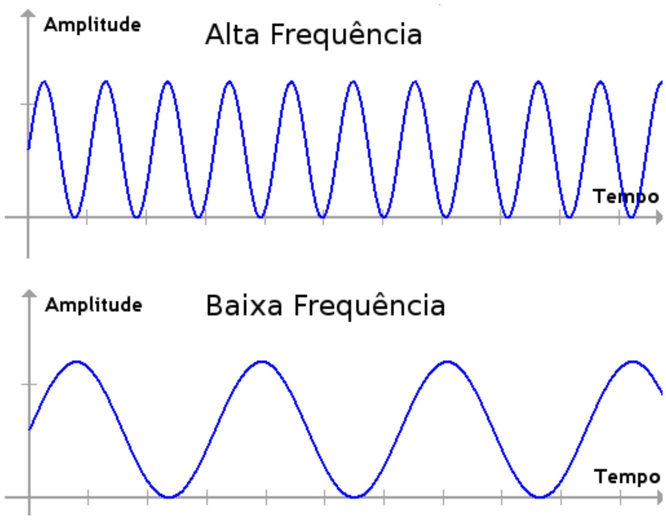
A Figura 33 corresponde a uma representação de onda sonora e seus elementos básicos: a crista, o vale, a amplitude, o comprimento e a frequência da onda (FRANKEN, 2015):

Figura 33 - Representação dos componentes básicos de uma onda sonora.



- **Crista:** parte mais alta da onda;
- **Vale:** parte mais baixa da onda;
- **Amplitude:** distância entre uma crista/vale e o eixo;
- **Comprimento da onda:** distância entre duas cristas ou dois vales consecutivos;
- **Frequência:** número de vezes que o comprimento de onda se repete em determinado intervalo de tempo, medido em Hertz. A Figura 34 ilustra o comportamento quando a frequência é alta (muitos comprimentos num intervalo de tempo) resultando em um som agudo e quando a frequência é baixa (poucos comprimentos num intervalo de tempo) resultando em um som reproduzido.

Figura 34 - Representação de frequência.



(Disponível em: https://anasoares1.wordpress.com/2011/01/31/som-e-caracteristicas-do-som-frequencia-amplitude-e-timb)

A função trigonométrica que representa a onda é uma senóide do tipo:

$$\boldsymbol{f(x) = A \cdot sen(Bx + C) + D}$$

✐ Vamos esboçar algumas representações gráficas.

2) Utilizando o GeoGebra esboce a representação gráfica das funções a seguir:

a) $f(x) = 2sen(x + 3) + 4$

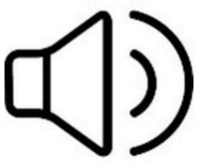
b) $f(x) = 4\cos(2x - 1) + 3$

O software GeoGebra dispõem de recursos para estudos sobre ondas sonoras, disponível em: https://www.geogebra.org/m/owWVzkJ0

✐ Com o auxílio do GeoGebra com ondas sonoras, responda:

3) Tendo em vista que a função senóide representa as ondas sonoras, responda no quadro abaixo o que acontece com representação gráfica e componentes da onda quando os coeficientes *A, B, C* e *D* da função foram alterados?

Coeficientes	Representação Gráfica	Componente da onda
A		
B		
C		
D		



Além das funções seno, cosseno e tangente, temos a secante, cossecante e cotangente, as quais poderão ser estudas em outra oportunidade[5].

Dica: outra possível aplicação das funções periódicas é no estudo sobre batimentos cardíacos. Abaixo segue uma prévia do assunto. Para maiores informações acesse: http://www.neuroterapia.com.br/padrao-do-ritmo-cardiaco.html

[5] Representação das Funções Trigonométricas estão disponíveis em https://www.geogebra.org/m/JPMq8Kt6.

“OS PADRÕES DO RÍTMO CARDÍACO E NOSSAS EMOÇÕES”

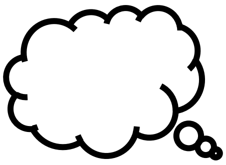
As pesquisas do *Institute of HeartMath* mostraram que um dos fatores mais poderosos que afetam o ritmo do nosso coração são os nossos sentimentos e as nossas emoções. Quando a Variação da nossa Frequência Cardíaca é traçada em um diagrama, ao longo do tempo, a forma de onda produzida é chamada de padrão do ritmo cardíaco.

O estresse emocional, incluindo emoções como raiva, frustração e ansiedade, dão origem a padrões do ritmo cardíaco que se apresentam de modo irregular e imprevisível: a forma da onda da Variação da Frequência Cardíaca se parece com uma série irregular de picos pontiagudos, conforme apresentado na Figura 35.

Figura 35 - Variação da Frequência Cardíaca em função do tempo devido à estresse emocional.

As emoções positivas, ao contrário, enviam um sinal muito diferente para todo o nosso corpo. Quando experimentamos emoções edificantes, como gratidão, alegria, atenção e amor, o nosso padrão de ritmo cardíaco torna-se altamente ordenado, semelhante a uma onda suave e harmoniosa, conforme Figura 36.

Figura 36 – Variação da Frequência Cardíaca em função do tempo durante emoções positivas.



Refletindo...

1) O caminho histórico correspondente ao desenvolvimento das Funções Trigonométricas, ajudou a compreender melhor os conceitos das função seno e cosseno?

2) As Funções Trigonométricas são aplicáveis em situações do dia a dia? Comente.

3) Você acha a História importante para compreender melhor os conteúdos estudados? Comente.

Por fim, os Quadro 12 e 13 apresentam a Ficha Explicativa e orientações a respeito da atividade 6:

Quadro 12 – Ficha Explicativa da Atividade 6.

Atividade 6: Representação gráfica das Funções Trigonométricas (seno, cosseno e tangente)
Objetivo da Atividade: Contribuir, de acordo com a metodologia de Ensino Histórico-Epistemológica, para uma aprendizagem significativa dos alunos sobre as representações gráficas das Funções Trigonométricas (seno, cosseno e tangente), na qual permite: - identificar o comportamento das funções seno, cosseno e tangente no gráfico; - usar o software GeoGebra; - identificar as alterações que ocorre ao modificar os coeficientes das funções;

- esboçar Funções Trigonométricas; - relacionar este conteúdo com situações que servem de possíveis aplicações; - relacionar os componentes das ondas sonoras com o comportamento da função no gráfico e identificar suas respectivas alterações; - refletir sobre o que e como foi estudado.		
Identificação (Atividade:Questão)	**Objetivos**	**Respostas aceitáveis**
AT6: Q1 (*a, b, c, d, e, f*)	Com as funções sendo demonstradas pelo GeoGebra, os alunos devem analisar quais foram as mudanças que ocorreram entre as duas funções apresentadas para cada item da questão, e descreve qual foi o tipo de alteração que ocorreu, se a função ampliou, comprimiu ou deslocou no gráfico.	*a)* Ampliou três vezes nos eixos “x” e “y”. *b)* Deslocou no eixo “y” e “x” para valores negativos. *c)* Deslocou no eixo “y” e alterou no eixo “x”. *d)* Ampliou duas vezes nos eixos “x” e “y”. *e)* Ficou semelhante a uma reta linear. *f)* Deslocou no eixo “y” e alterou no eixo “x”.
AT6: Q2 (*a, b*)	Com o auxílio do GeoGebra, os alunos devem observar o comportamento das funções, uma discussão sobre essas mudanças é fundamental. Posteriormente, devem esboçam as funções na Sequência Didática. Importante orientar os alunos a observarem os pontos nos eixos “x” e “y”.	Resposta pessoal.

<table>
<tr>
<td>AT6: Q3 (a, b, c, d)</td>
<td>Com as informações e vídeo apresentado aos alunos sobre as ondas sonoras e seus componentes, os alunos devem observar e analisar a função senóide e o que ocorre ao alterar os coeficientes da função, tanto na representação gráfica quanto os componentes da onda.</td>
<td>
<table>
<tr><th>Ocorreu</th><th>Componente da onda</th></tr>
<tr><td>Deslocou em “y”</td><td>Alterou o valor da crista e do vale</td></tr>
<tr><td>Comprimiu/expandiu no eixo “y”</td><td>Alterou a amplitude</td></tr>
<tr><td>Comprimiu/expandiu no eixo “x”</td><td>Alterou o comprimento da onda/ frequência</td></tr>
<tr><td>Deslocou no eixo “x”</td><td>Alterou o inicio e fim da onda</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>AT6: RF1</td>
<td>De acordo com todo estudo realizado, os alunos devem refletir e descrever se o caminho histórico percorrido para ensinar as Funções Trigonométricas ajudou ou não a compreender as Funções Trigonométricas.</td>
<td>Resposta pessoal.</td>
</tr>
<tr>
<td>AT6: RF2</td>
<td>Os alunos devem refletir se a partir das situações problema apresentadas no estudo das Funções Trigonométricas, tais como ondas sonoras e a relação entre ritmo cardíaco e emoções, conseguiram identificar aplicações possíveis para o dia a dia deste conteúdo.</td>
<td>Resposta pessoal.</td>
</tr>
<tr>
<td>AT6: RF3</td>
<td>De acordo com a metodologia utilizada na Sequência Didática, os alunos devem refletir a respeito e descrever qual a opinião deles sobre.</td>
<td>Resposta pessoal.</td>
</tr>
</table>

Fonte: Os autores (2018)

Quadro 13 - Orientações para a Atividade 6.

Atividade 6: Representação gráfica das Funções Trigonométricas (seno, cosseno e tangente)	
Duração:	2 horas/aula.
Conhecimento matemático envolvido:	• Representações gráficas de funções; • Funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.
Papel do professor:	Orientar, mediar e auxiliar o processo de construção do conhecimento.
Atividade:	Individual ou em grupos, depende da disponibilidade de computadores.
Materiais:	• Atividade impressa; • Computador (software GeoGebra)
Estratégia de ação:	Para a execução da atividade é importante às leituras das “caixas”, como nas demais atividades, pois são elas que orientam a aplicação da Sequência Didática. Destaca-se a necessidade de já ter salvo o software no(s) computador(es), além de verificar se todas as funções estão corretas na hora de digitá-las. A respeito do vídeo a ser demonstrado, ele pode ser baixado no computador, não sendo necessário assim o uso de internet. Contudo, é importante verificar se o vídeo decorre bem e se o som está adequado. Ao demonstrar as Funções Trigonométricas no software é necessário chamar a atenção dos alunos para as mudanças que ocorreram, levando eles a interpretar o que de fato mudou ou não mudou. Na questão 2, ao esboçar as funções é importante discutir com os alunos o comportamento da função comparada com sua forma escrita, para que assim facilite a compreensão e o esboço. No que se refere as questões refletindo, se o professor achar necessário, pode recapitular de forma breve o que foi visto durante a aplicação da Sequência Didática, promovendo uma discussão para que, posteriormente, os alunos escrevam suas opiniões.
Avaliação:	As avaliações referentes a SD deveram ser analisadas por um todo em diversos aspectos relevantes, visto que toda e qualquer atividade lhe serão atribuídas valores de acordo com os quais o professor determinar, devido que o sistema necessita de notas. Para isso elencamos alguns critérios a serem avaliados, como: Sala de aula: • Participação do aluno durante as discussões e leituras históricas; • Comprometimento em realizar as tarefas.

	Respostas na SD: • O aluno apresentou o desenvolvimento dos cálculos e fórmulas, quando necessário. Podendo estar corretos ou não; • O aluno demonstrou tentativas de responder as questões; Cujo objetivo não esta em atribuir notas para quem soube ou não responder, mas sim em coletar informações dos alunos a fim de analisar sua aprendizagem e a eficiência do material.

Fonte: Os autores (2018)

4 ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo serão apresentadas as análises realizadas sobre os dados oriundos da aplicação da Sequência Didática Potencialmente Significativa à luz da Análise Textual Discursiva.

4.1 PERFIL DOS SUJEITOS DA PESQUISA

A Sequência Didática Potencialmente Significativa proposta por esta pesquisa foi aplicada em um Colégio Estadual de uma cidade da região Norte do Paraná. A turma designada para participar da SD foi 3º ano do Ensino Médio, visto que a professora de Matemática do Colégio que leciona nos três anos do Ensino Médio sentiu a necessidade de proporcionar este estudo aos alunos do 3º ano, pois, como ela relatou, eles iriam concluir o Ensino Médio sem estudar este conteúdo. O período de aplicação foi de 16/10/2017 à 13/11/2017, o tempo para realização foi maior que o tempo planejado, este fato se deve por eventos realizados pela escola durante este período.

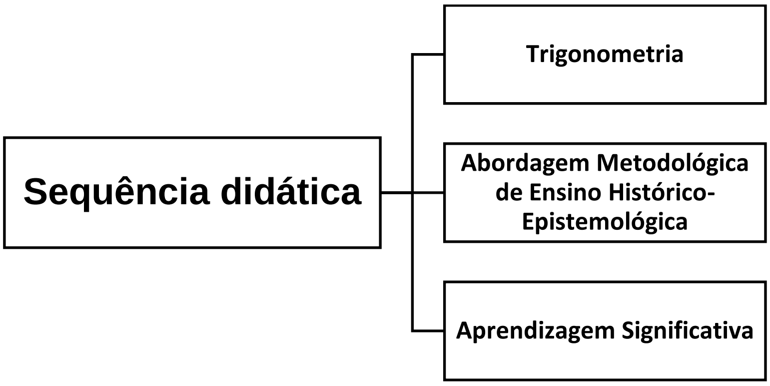
Antes da aplicação da SD, foram entregues aos alunos o Termo de Consentimento (Apêndice A) para colherem assinatura dos seus respectivos pais, quando forem menores de 18 anos, e o Termo e Assentimento (Apêndice B) para a ciência e assinatura dos próprios alunos, de forma que os alunos estiveram livres para optar a entregar ou não, de acordo que foi esclarecido os termos a todos.

Os sujeitos que participaram da aplicação da SD foram 33 alunos, com faixas etárias entre 16 a 19 anos. Dos 33 alunos, 9 não entregaram os termos necessários, portanto caracteriza assim a eliminação dos alunos para análise dos dados, visto que não nos é permitido. Durante a aplicação alguns alunos faltaram nas aulas, caracterizando assim também a eliminação dos alunos para a análise dos dados, de acordo que lhe faltaram dados com relação aos demais. Por estes motivos, 14 alunos foram eliminados, totalizando assim 19 alunos para análise dos dados.

4.2 Apresentação da Análise de Dados

Para realizar a análise dos dados, examinamos o “corpus”, organizamos e codificamos as informações presentes nos registros dos alunos. Foram delineadas três categorias prévias, confirme Figura 37.

Figura 37 - Categorias prévias estabelecidas para análise.



Fonte: Os autores (2018).

A codificação dos elementos presentes na SD foi atribuída conforme apresentado no Quadro 14.

Quadro 14 - Codificação para análise dos dados.

Codificação	Referente a...
AT1, AT2, ... AT6	...atividades propostas pela SD, totalizando seis, cada uma referente a um tema especifico.
Q1, Q2, Q3, ...	...questões de cada atividade.
Q1a, Q1b, Q1c, ...	...itens de uma determinada questão.
RF1, RF2, ...	...questões referentes ao tema “Refletindo” das atividades.
A1, A2, A3, ...A19	...alunos que participaram da aplicação da SD.

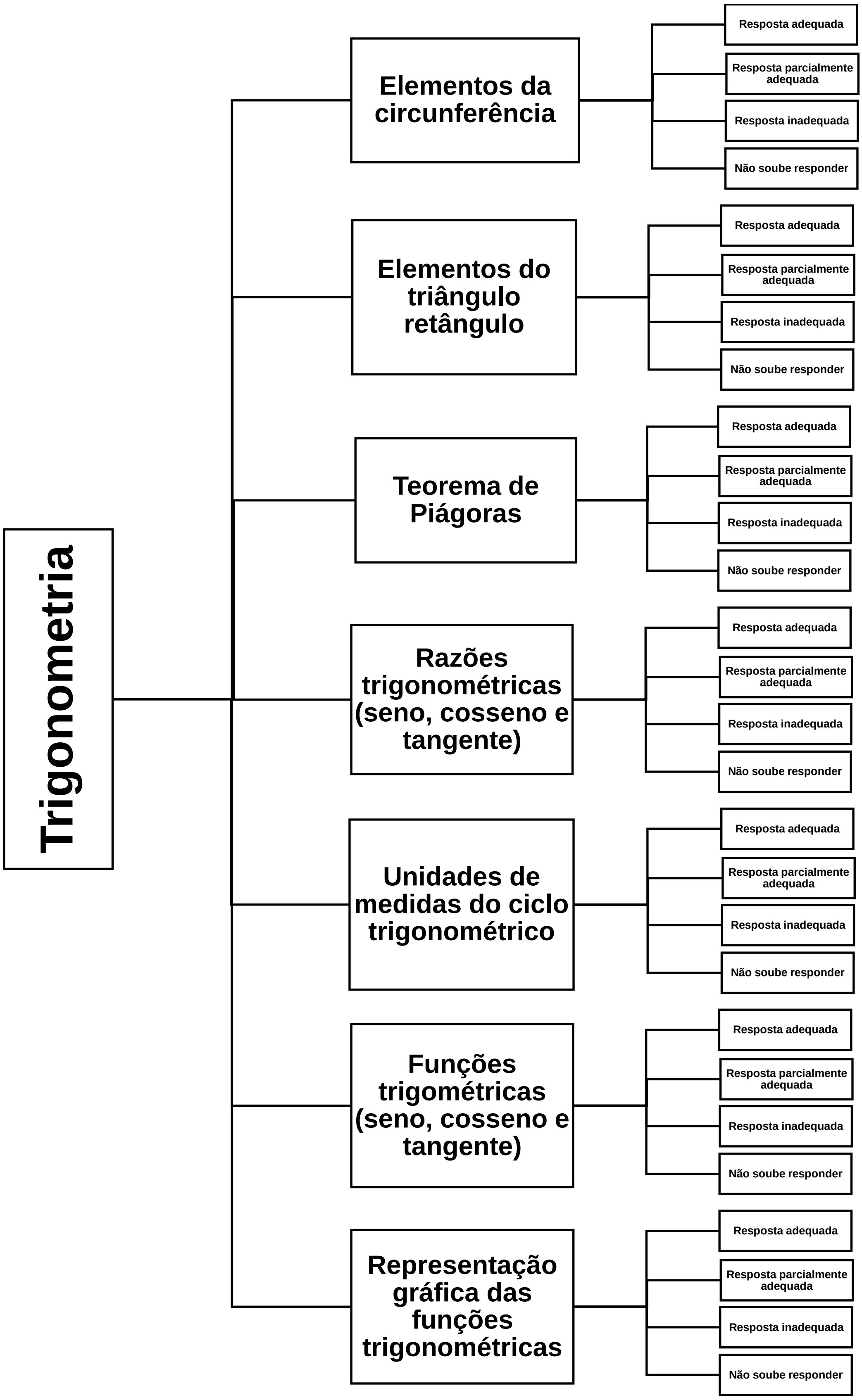
Fonte: Os autores (2018).

A seguir, serão apresentadas as categorias definidas como suas respectivas subcategorias e unidades, segundo exemplos de excertos.

4.2.1 Categoria - Trigonometria

Esta categoria se refere ao conteúdo específico abordado na SD. Devido à organização para o processo de análise, foram elencadas subcategorias de modo a especificar as particularidades do conteúdo, a saber: elementos da circunferência, elementos do triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras, razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente), unidades de medidas do ciclo trigonométrico, Funções Trigonométricas (seno, cosseno e tangente) e representações gráficas das Funções Trigonométricas. Estas subcategorias foram analisadas de acordo com as unidades prévias que compreendem: “resposta adequada”, “resposta parcialmente adequada”, “resposta inadequada” e “não soube responder”, conforme representação esquemática apresentada na Figura 38.

Figura 38 - Categoria sobre o conteúdo de Trigonometria, com suas respectivas subcategorias e unidades.

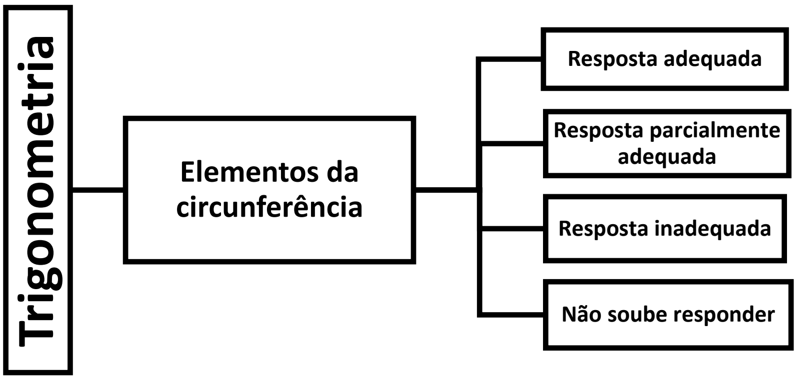


Fonte: Os autores (2018).

4.2.1.1 Subcategoria – Elementos da circunferência

A subcategoria "Elementos da circunferência" teve por objetivo evidenciar as atividades desenvolvidas pelos alunos referentes aos elementos corda, arco, diâmetro, raio e comprimento da circunferência. As questões propostas com estes fins foram analisadas para identificar se os alunos recordam estes elementos (como na AT1 Q3) e, posteriormente, se aprenderam a identificar os elementos de uma circunferência (como na AT3 Q1A, Q1B e AT4 Q1), analisando-as de acordo com as unidades prévias como mostra o esquema da Figura 39.

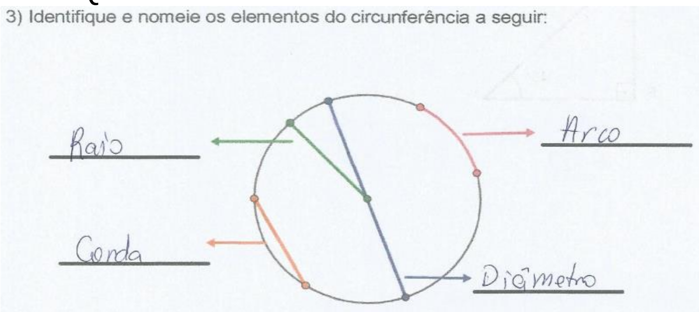
Figura 39 - Categoria Trigonometria, subcategoria Elementos da circunferência e unidades prévias.

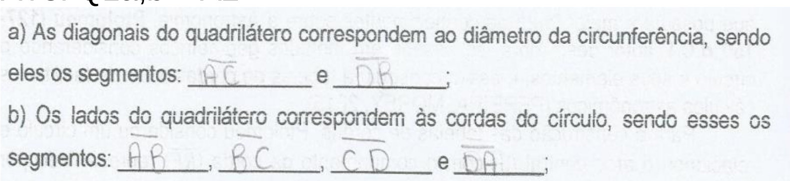
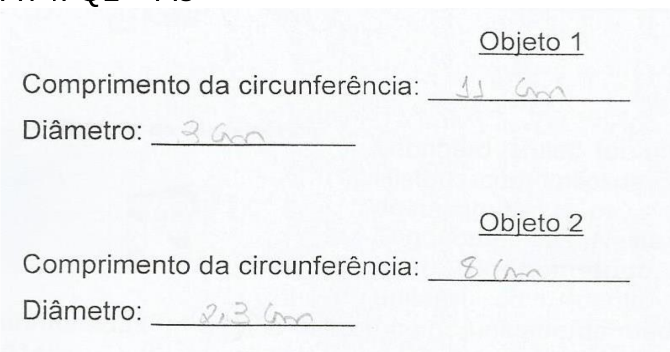
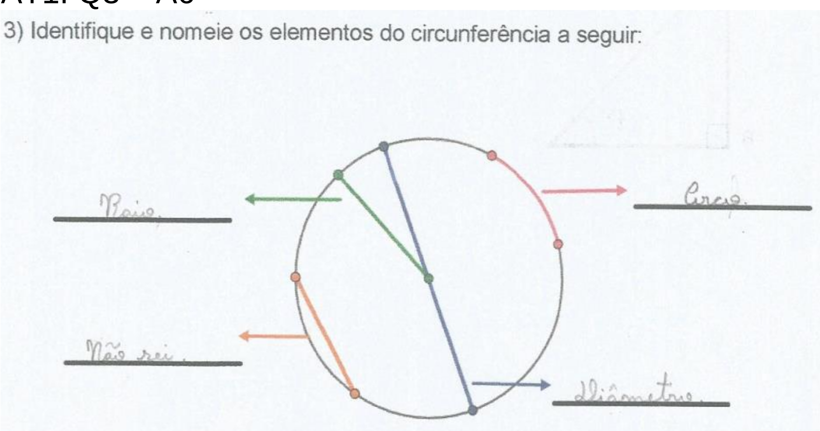


Fonte: Os autores (2018).

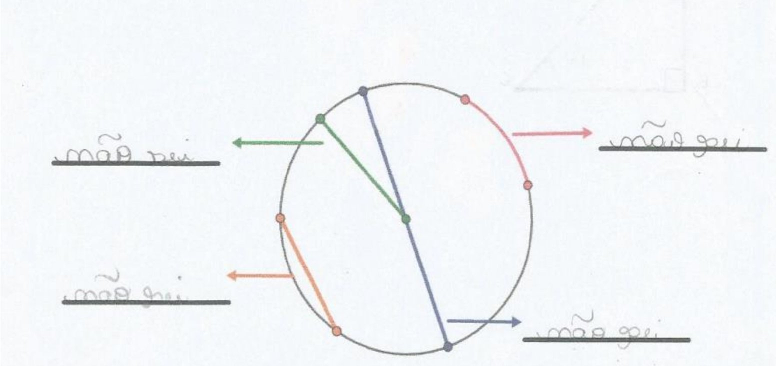
De acordo com as unidades prévias estabelecidas, a única que não foi efetivada foi a unidade "resposta inadequada". Portanto, de acordo com as unidades efetivas, foram realizadas as análises como mostra o Quadro 15.

Quadro 15 - Categoria Trigonometria, subcategoria Elementos da circunferência e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

<table>
<tr><td>Resposta adequada: os alunos identificaram os elementos que compõem a circunferência de forma adequada.</td></tr>
<tr><td>AT1: Q3 – A4


AT3: Q1a,b – A2

a) As diagonais do quadrilátero correspondem ao diâmetro da circunferência, sendo eles os segmentos: $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$;
b) Os lados do quadrilátero correspondem às cordas do círculo, sendo esses os segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$;
AT4: Q1 – A3

Objeto 1
Comprimento da circunferência: 11 cm
Diâmetro: 3 cm
Objeto 2
Comprimento da circunferência: 8 cm
Diâmetro: 2,3 cm</td></tr>
<tr><td>Síntese descritiva: os nomes atribuídos aos elementos, a representação por segmentos de retas e medição com auxílio do barbante dos elementos da circunferência apresenta-se de modo coerente a respeito de qual elemento da circunferência estava se referindo.</td></tr>
<tr><td>Resposta parcialmente adequada: os alunos identificaram alguns dos elementos que compõem a circunferência de forma adequada.</td></tr>
<tr><td>AT1: Q3 – A6


AT3: Q1a – A7</td></tr>
</table>

a) As diagonais do quadrilátero correspondem ao diâmetro da circunferência, sendo eles os segmentos: $\overline{AC}$ e AB;
Síntese descritiva: ao nomear os elementos que compõem a circunferência e representar por segmentos de retas, o aluno identifica apenas alguns de forma correta. Os demais identificaram de forma incorreta e/ou não soube identificar.
Não soube responder: os alunos não souberam identificar todos os elementos que compõem a circunferência.
AT1: Q3 – A1 3) Identifique e nomeie os elementos do circunferência a seguir: 
Síntese descritiva: devido a uma não aprendizagem ou esquecimento os alunos não souberam identificar os nomes dos elementos da circunferência, visto que essa questão faz parte da atividade para identificar os conhecimentos prévios dos alunos.

Fonte: Os autores (2018).

Nesta subcategoria a finalidade era identificar se os alunos tinham conhecimento sobre quais são os elementos de uma circunferência (AT1: Q3) e se no decorrer da SD conseguiram identificar, de acordo com o contexto histórico, estes elementos (AT3: Q1a, b).

Na atividade 1 questão 3, apenas o A4 respondeu adequadamente e o A6 parcialmente, os demais alunos não souberam nomear nenhum elemento da circunferência. Como é uma questão para identificar conhecimentos prévios dos alunos, foi possível verificar que aproximadamente 90% dos alunos não possuíam conhecimentos necessários para identificar e diferenciar os elementos da circunferência.

De acordo com o Caderno de Expectativas e Aprendizagem do Estado do Paraná estes elementos devem ser estudados no 6º ano, ao ingressarem no Ensino Fundamental II, quando conceitos de circunferência e círculos são apresentados (PARANÁ, 2012). Somente a partir deste resultado, fica evidente a precariedade do ensino/aprendizagem atual, visto que os alunos não conseguiram se quer identificar/diferenciar raio e diâmetro, definições básicas e fundamentais para o estudo das Funções Trigonométricas. Deste modo, outras atividades da SD foram elaboradas para possibilitar a aprendizagem desses elementos da circunferência, já que representam conceitos relevantes para aprendizagem das Funções Trigonométricas.

Nas atividades 3 e 4 há questões pelas quais os alunos podem adquirir conhecimentos sobre os elementos da circunferência. Na atividade 3, questão 1, no item “a”, 84% dos alunos identificaram os segmentos que representavam elementos da circunferência de forma adequada e, no item “b”, 100% identificaram os elementos circunferência apresentados de forma adequada. Para este resultado pode ser levado em consideração o contexto histórico que proporcionou o uso do quadrilátero inscrito na circunferência, podendo ter facilitado assim a identificação de alguns dos elementos da circunferência. Em relação à atividade 4 questão 1, todos os alunos identificaram os elementos - comprimento e diâmetro - da circunferência, obtendo assim 100% das respostas adequadas, ressaltando que esta questão foi realizada em grupos, manuseando e medindo os elementos da circunferência. Diante destes resultados, fica evidente uma melhora significativa em comparação a atividade 1 questão 3.

Diante da análise destas questões, o Quadro 16 mostra de maneira geral e quantitativa as atividades relacionadas a esta subcategoria e o total de alunos que realizaram as atividades de acordo com as unidades.

Quadro 16 - Dados quantitativos das unidades referentes a subcategoria Elementos da circunferência.

	Resposta adequada	**Resposta parcialmente adequada**	**Não soube responder**
AT1: Q3	1	1	17
AT3: Q1a	16	3	0
AT3: Q1b	19	0	0
AT4: Q1	19	0	0
TOTAL	**55**	**4**	**17**
%	**72%**	**5%**	**23%**

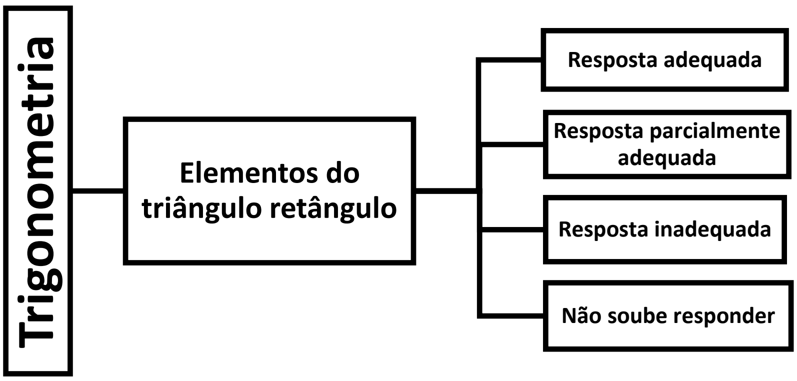
Fonte: Os autores (2018).

Tendo em vista a quantidade de alunos que não souberam identificar os elementos da circunferência durante a primeira atividade da Sequência Didática e as respostas obtidas nas atividades 3 e 4, consideramos que os alunos conseguiram compreender e assimilar o conhecimento referente aos elementos da circunferência de forma satisfatória, como, também, as porcentagens demonstram a quantidade de respostas adequadas no total confirmando este resultado.

4.2.1.2 Subcategoria – Elementos do triângulo retângulo

A subcategoria "Elementos do triângulo retângulo" foi analisada de acordo com as unidades prévias, como mostra a Figura 40, tendo por objetivo evidenciar as atividades desenvolvidas pelos alunos referentes aos elementos: cateto adjacente, cateto oposto e hipotenusa. As questões proposta com estes fins demonstraram o conhecimento prévio dos alunos (como na AT1: Q4) e, posteriormente, se aprenderam a identificar os elementos de um triângulo retângulo (como na AT2: Q7 e AT2: Q8a, b, c).

Figura 40 - Categoria Trigonometria, subcategoria Elementos do triângulo retângulo e unidades prévias.



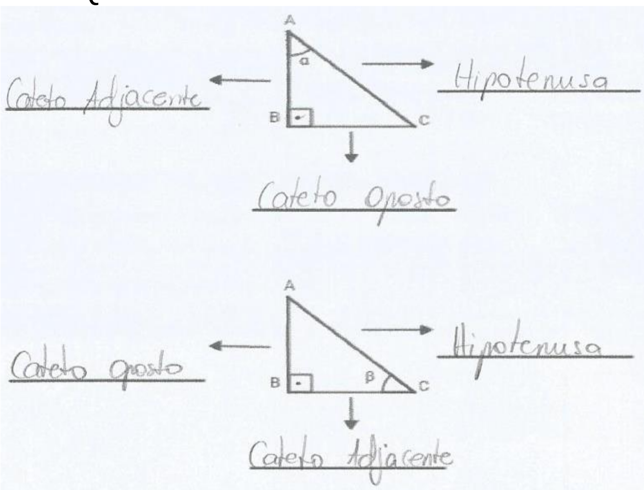
Fonte: Os autores (2018).

Nesta subcategoria todas as unidades foram efetivadas, como é possível observar no Quadro 17.

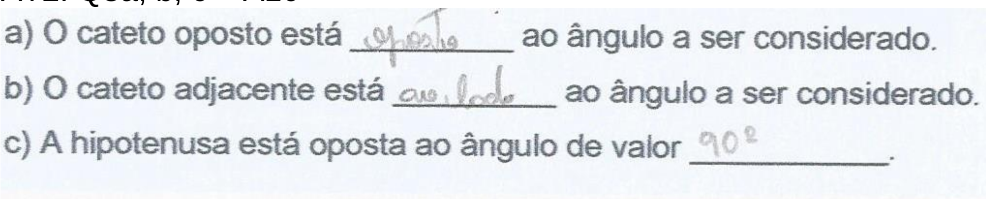
Quadro 17 - Categoria Trigonometria, subcategoria Elementos do triângulo retângulo e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

Resposta adequada: os alunos identificaram e compreenderam os elementos no triângulo retângulo de forma adequada.

AT2: Q7 – A4



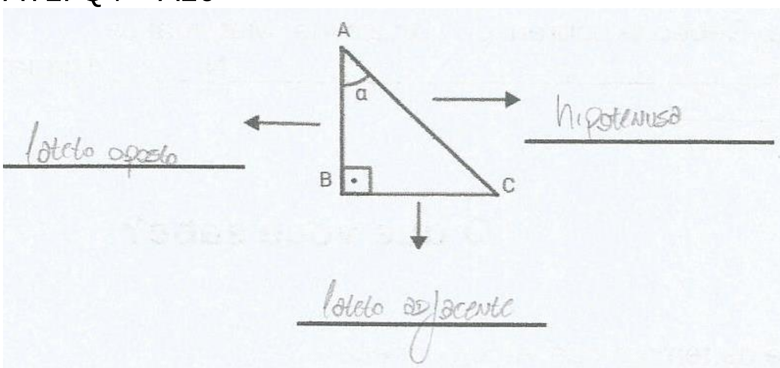
AT2: Q8a, b, c – A10


a) O cateto oposto está oposto ao ângulo a ser considerado.
b) O cateto adjacente está ao lado ao ângulo a ser considerado.
c) A hipotenusa está oposta ao ângulo de valor 90º.

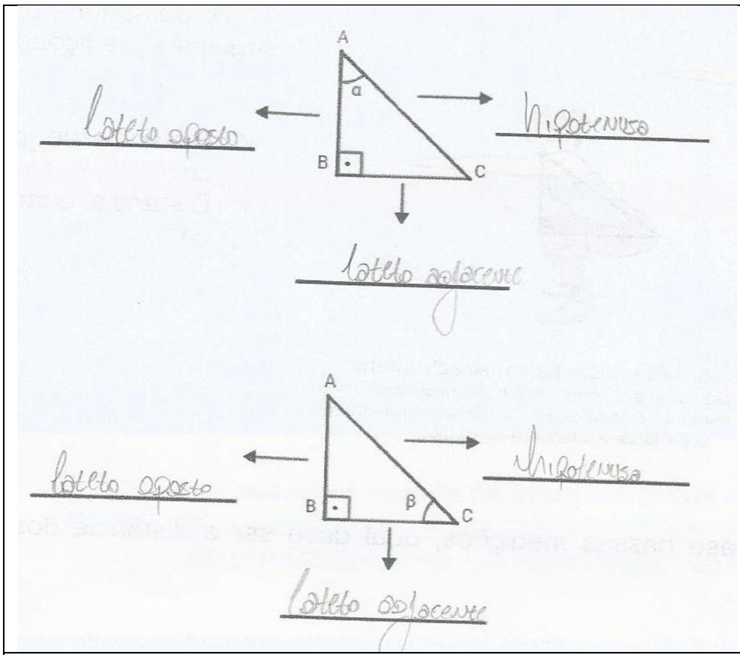
Síntese descritiva: a identificação dos catetos, hipotenusa e a compreensão da posição destes elementos no triângulo retângulo estão coerentes e de acordo com a posição em que o ângulo em destaque se encontra.

Resposta parcialmente adequada: os alunos identificaram alguns dos elementos do triângulo retângulo de forma adequada.

AT1: Q4 – A16



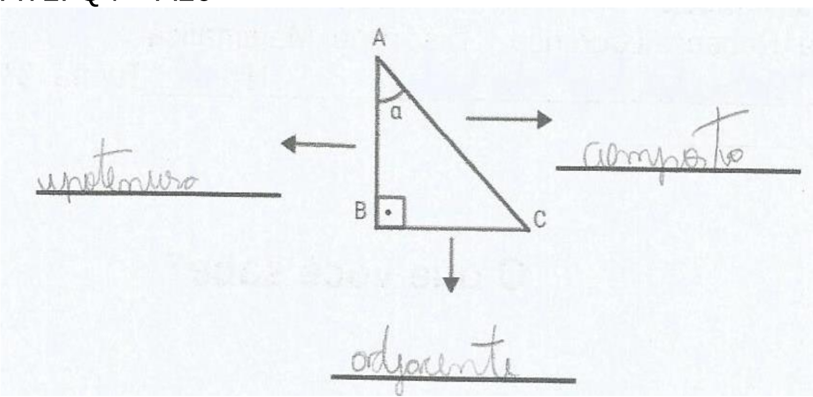
AT2: Q7 – A16



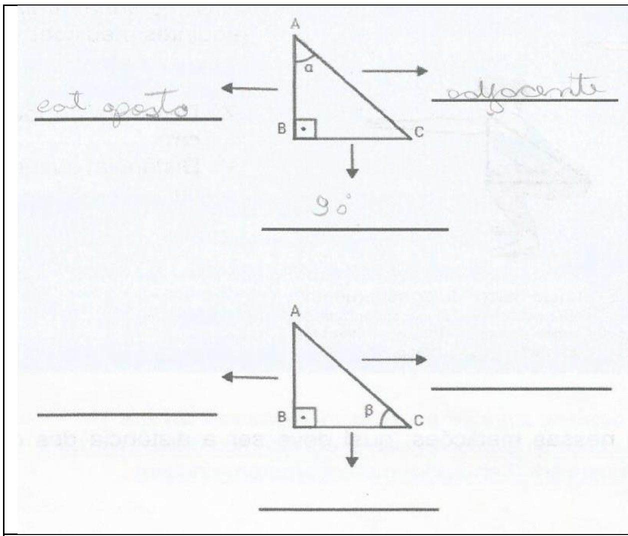
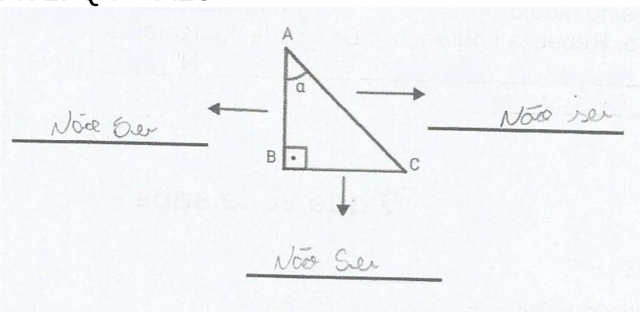
Síntese descritiva: a identificação dos catetos e hipotenusa de acordo com a posição do ângulo em destaque está parcialmente correta, ou seja, um lado ou outro foi nomeado e localizado de forma correta e outro(s) de forma incorreta. Na questão 4 da atividade 1, os alunos utilizaram os termos corretamente, porém localizaram alguns deles de forma inadequada. Já na questão 7 da atividade 2 o mesmo aluno identificou de forma adequada apenas um triângulo, assim consideramos que ele não se apropriou de usar o ângulo em destaque como referência para identificação dos elementos.

Resposta inadequada: os alunos identificaram todos os elementos do triângulo retângulo de forma inadequada.

AT1: Q4 – A10



AT2: Q7 – A7

<table>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>Síntese descritiva: a identificação dos catetos e hipotenusa, de acordo com a posição do ângulo em destaque, está incorreta, pois não usaram termos adequados e/ou localizando-os no triângulo retângulo de forma inadequada.</td></tr>
<tr><td>Não soube responder: os alunos não souberam identificar e compreender os elementos do triângulo retângulo.</td></tr>
<tr><td>AT1: Q4 – A18

</td></tr>
<tr><td>Síntese descritiva: nesta questão o objetivo era identificar os conhecimentos prévios do aluno. Os alunos A1, A8 e A18 não souberam identificar os lados referentes aos catetos e hipotenusa.</td></tr>
</table>

Fonte: Os autores (2018).

De acordo com Celso e Ferreira (2015) no ensino da Trigonometria no triângulo retângulo há uma infinidade de situações que podem ser propostas com o objetivo de dar significado ao que se está aprendendo, dentro desta infinidade focamos em conceitos como os catetos e hipotenusa. Consideramos que se o aluno se apropriar destes conceitos, no decorrer da SD ele poderá compreender e desenvolver melhor as razões trigonométricas, tendo em vista que as razões são definidas por catetos e hipotenusa do triângulo retângulo. Para isto, foram desenvolvidas questões para que os alunos se apropriassem destes conceitos, questões estas analisadas a seguir.

Na atividade 1, questão 4, foi analisado se os alunos já possuíam conhecimento prévio para nomear os lados do triângulo retângulo.

Aproximadamente 47% dos alunos nomearam de forma correta, demonstrando conhecimentos prévios adequados para identifica-los no triângulo retângulo com uso das terminologias adequadas. 21% dos alunos apresentaram respostas parcialmente adequadas, enquanto aproximadamente 16% apresentaram resposta inadequada e os outros 16% não souberam responder. Entre os problemas apresentados muitos não souberam utilizar o ângulo em destaque como referência para nomear os lados e outros não se apropriaram dos termos corretos.

Na atividade 2 questão 7, foi oferecida novamente a oportunidade de os alunos retomarem esses elementos identificando os catetos e hipotenusa no triângulo retângulo, porém em duas situações em que os ângulos em destaque estão em vértices diferentes do triângulo retângulo. Foi notável observar nesta atividade como os alunos evoluíram, visto que apenas a resposta o aluno A16 identificou como “resposta parcialmente adequada” e o aluno A7 como “resposta inadequada” (Quadro 17), os demais nomearam os lados do triângulo de forma correta, totalizando aproximadamente 90% de acertos. Este fato pode ser consequência dos alunos terem sido instruídos a terem como referência a posição do ângulo em destaque para nomear os lados do triângulo retângulo.

Na questão 8 da mesma atividade, os alunos teriam que completar as frases com a palavra correta, ou seja, a qual caracteriza os termos catetos oposto, cateto adjacente e hipotenusa no triângulo retângulo. Todos os alunos, ou seja, 100% responderam a esta questão de forma correta nos itens “a”, “b” e “c”, compreendendo assim o significado para cada termo utilizado no triângulo retângulo.

O Quadro 18 a seguir exibe de forma quantificada os alunos que corresponderam a cada Unidade efetivada.

Quadro 18 – Dados quantitativos das Unidades referentes a Subcategoria Elementos do triângulo retângulo.

	Resposta adequada	**Resposta parcialmente adequada**	**Resposta inadequada**	**Não soube responder**
AT1: Q4	9	4	3	3
AT2: Q7	17	1	1	0
AT2: Q8a	19	0	0	0
AT2: Q8b	19	0	0	0
AT2: Q8c	19	0	0	0
TOTAL	**83**	**5**	**4**	**3**
%	**88%**	**5%**	**4%**	**3%**

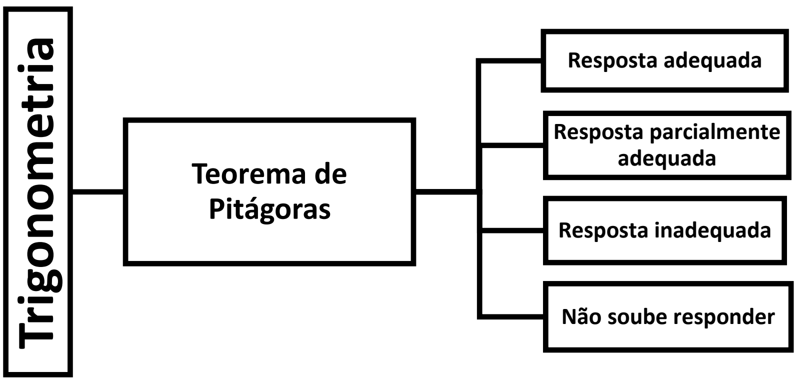
Fonte: Os autores (2018).

Por meio dos dados quantitativos fica evidente a evolução dos alunos, pois as unidades “resposta parcialmente adequada”, “resposta inadequada” e “não soube responder” diminuiu significativamente em comparação entre as questões da AT2 e AT1, as quais tratavam do mesmo tipo de resolução. Considerando que a AT1 tinha como objetivo identificar os conhecimentos que os alunos já possuíam, observa-se na AT2 que os alunos adquiriram o conhecimento por meio da aplicação da SD.

4.2.1.3 Subcategoria – Teorema de Pitágoras

A subcategoria “Teorema de Pitágoras” analisou o uso do Teorema de Pitágoras nas resoluções das questões a fim de identificar o valor dos lados do triângulo retângulo. Para isto, a partir das unidades prévias estabelecidas (como mostra a Figura 41), a Q5 da AT1 analisou se os alunos recordavam o conteúdo, as questões Q4 “a” e “b”, Q5 e Q6 da atividade 2, analisou se os alunos compreenderam e formalizaram algebricamente a fórmula do Teorema de Pitágoras e na Q9 da atividade 2 e questão 1 “d” da atividade 3 como utilizaram da mesma para resolução de situações.

Figura 41 - Categoria Trigonometria, subcategoria Teorema de Pitágoras e unidades prévias.



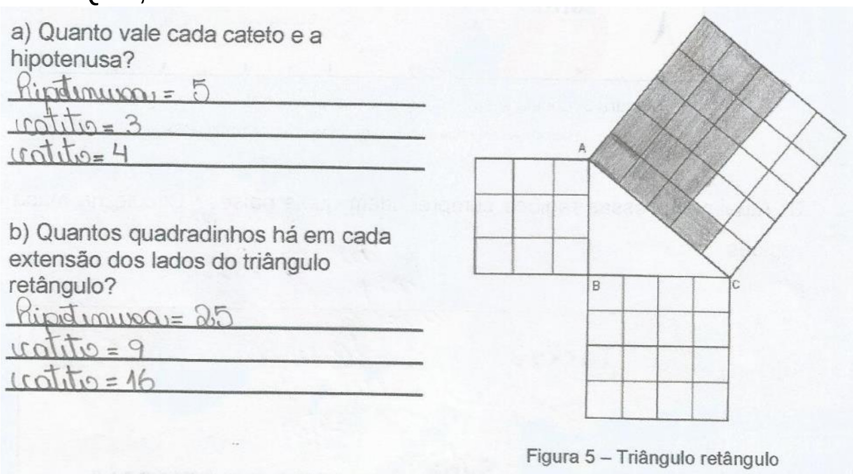
Fonte: Os autores (2018).

Todas as unidades se efetivaram nesta categoria, ou seja, “resposta adequada”, “resposta parcialmente adequada”, “resposta inadequada” e “não soube responder”, como é possível observar no Quadro 19.

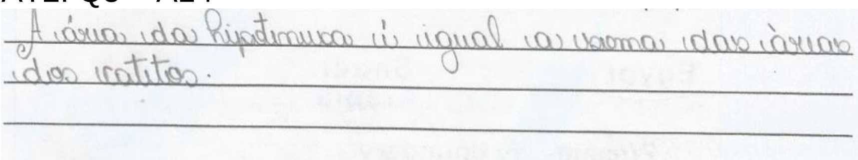
Quadro 19 - Categoria Trigonometria, subcategoria Teorema de Pitágoras e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

Resposta adequada: os alunos utilizaram a fórmula adequadamente e compreenderam o conceito, resolução e aplicação do Teorema de Pitágoras de forma adequada.

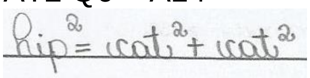
AT2: Q4a,b – aluno 14



AT2: Q5 – A14



AT2 Q6 – A14



AT2: Q9 – A3

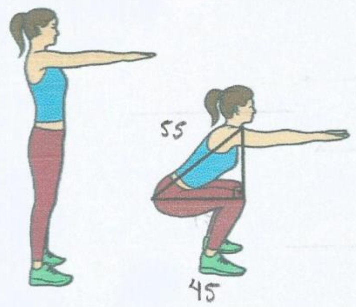


Figura 6 – Exercício físico: agachamento
(Imagem disponível em: https://www.ativo.com/corrida-de-rua/treinamento-de-corrida/dicas-para-fortalecer-membros-superiores-e-inferiores-do-corpo/)

O *personal trainer* de Ana fez as seguintes medições:

✓ Distância do joelho ao quadril = 45 cm
✓ Distância quadril aos ombros = 55 cm

$Hip^2 = Cat^2 + Cat^2$

Pitágoras

Com base nessas medições, qual deve ser a distância dos ombros ao joelho de Ana?

$Hip^2 = Cat^2 + Cat^2$

$55^2 = 45^2 + x^2$

$3025 = 2025 + Cat^2$

$3025 - 2025 = Cat^2$

$Cat = \sqrt{1000}$

$\boxed{Cat = 31{,}6}$

AT3: Q1d – A6

$\overline{AB}^2 = 1^2 + 1^2$

$\overline{AB}^2 = 1 + 1$

$\boxed{\overline{AB} = \sqrt{2}}$

A corda $\overline{AB}$ corresponde a: $\sqrt{2}$.

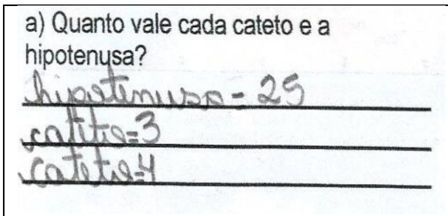
AT2: RF – A12

Para medir a altura, distância de um objeto ao outro formado por um triângulo retângulo.

Síntese descritiva: houve a compreensão e formalização algébrica adequada da fórmula do Teorema de Pitágoras por meio da demonstração dos quadradinhos, como se observa nas respostas do aluno A14. A partir de então, os alunos realizaram a resolução de situações problemas compreendendo o uso do Teorema de Pitágoras para descobrir o valor desconhecido do lado do triângulo retângulo, como nas Questões Q9 (AT2) e Q1d (AT3). Foi evidenciado também que houve a compreensão de cada elemento do Teorema de Pitágoras com o aluno A12 apresentando uma das respostas mais completas.

Resposta parcialmente adequada: os alunos resolveram a fórmula de forma parcialmente adequada e compreenderam parcialmente o conceito, resolução e aplicação do Teorema de Pitágoras.

AT2: Q4a – A8



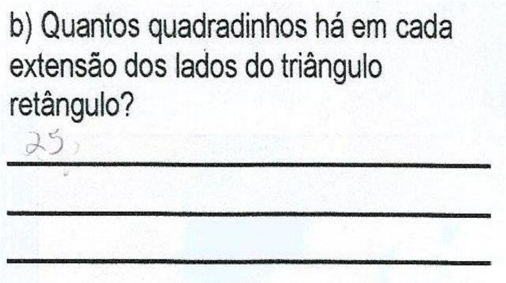
a) Quanto vale cada cateto e a hipotenusa?

hipotenusa = 25

cateto = 3

cateto = 4

AT2 Q4b – A7



b) Quantos quadradinhos há em cada extensão dos lados do triângulo retângulo?

25,

AT2: Q9 – A2

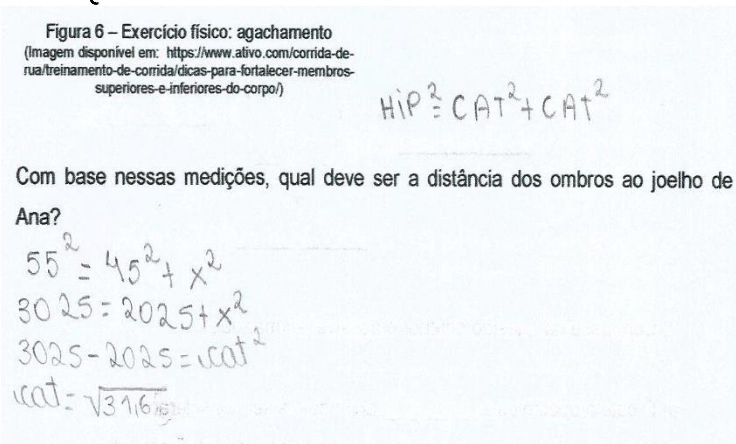


Figura 6 – Exercício físico: agachamento
(Imagem disponível em: https://www.ativo.com/corrida-de-rua/treinamento-de-corrida/dicas-para-fortalecer-membros-superiores-e-inferiores-do-corpo/)

$HIP^2 = CAT^2 + CAT^2$

Com base nessas medições, qual deve ser a distância dos ombros ao joelho de Ana?

$55^2 = 45^2 + x^2$

$3025 = 2025 + x^2$

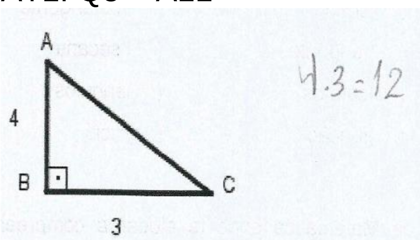
$3025 - 2025 = cat^2$

$cat = \sqrt{31{,}6}$

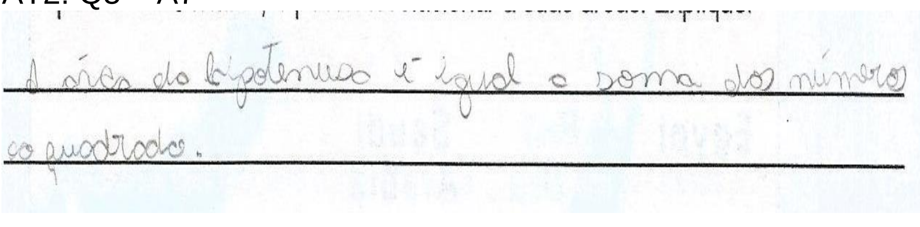
Síntese descritiva: para a contagem dos quadradinhos na demonstração e na resolução de situações problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras os alunos realizaram de forma incorreta alguma operação e/ou não completaram a resolução.

Resposta inadequada: os alunos não utilizaram do Teorema de Pitágoras para realizar o cálculo e interpretaram com termos inadequados o conceito do Teorema de Pitágoras.

AT1: Q5 – A11

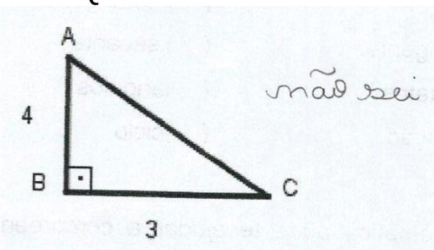


AT2: Q5 – A7



A área da hipotenusa é igual a soma dos números ao quadrado.

Síntese descritiva: os alunos não utilizaram da fórmula do Teorema de Pitágoras

para a resolução da Questão Q5 da AT1, resultando assim em valores incorretos para o lado do triângulo retângulo. Em relação a interpretação do conceito do Teorema de Pitágoras, o aluno utilizou de termos inadequadas, como no excerto do aluno A7 na Q5 da AT2, o correto seria o termo “área” e não “número”.
Não soube responder: os alunos não souberam identificar/utilizar o Teorema de Pitágoras para resolução.
AT1: Q5 – A1 
Síntese descritiva: A Q5 da AT1 é uma questão com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios dos alunos. Pode-se observar por meio da análise que a maioria dos alunos não soube identificar para quais situações se aplica o Teorema de Pitágoras e/ou não lembraram a fórmula para o cálculo.

Fonte: Os autores (2018).

A partir dos excertos apresentados, observa-se que na atividade 1 questão 5 os alunos deveriam identificar qual conteúdo matemático satisfaria a questão e resolvê-la encontrando o valor do lado do triângulo retângulo não informado. Contudo, aproximadamente 63% dos alunos não souberam responder. Alguns a resolveram de forma incorreta (21%) colocando qualquer valor ou multiplicando/somando os valores dos lados dados. Apenas dois alunos A4 e A6 realizaram de forma adequada, utilizando da fórmula adequada e obtendo resultado correto, o A19 de forma parcialmente adequada, pois utilizou da fórmula correta, porém não tirou da raiz o valor encontrado obtendo assim uma resolução incompleta.

As questões Q4, Q5 e Q6 da atividade 2 foram complementares entre si, tanto por meio da demonstração dos quadradinhos, como na utilização da fórmula do Teorema de Pitágoras. Neste percurso obtivemos êxito, pois para estas questões os alunos se classificaram nas unidades “resposta adequada” e “resposta parcialmente adequada”, com exceção do aluno (A7), o qual respondeu a questão 5 de forma inadequada, tendo em vista que utilizou de termos não adequados como foi mostrado no Quadro 19. A partir disto, na questão 9 da mesma atividade, os alunos teriam de utilizar da fórmula do Teorema de Pitágoras para realizar o cálculo. Neste sentido, todos resolveram a questão utilizando da fórmula adequada. Entretanto, 13 alunos (68,4%) realizaram o processo de resolução corretamente e os demais 6 alunos (31,6%) não concluíram a resolução, caracterizando assim "resposta parcialmente adequada".

Na Q1d da AT3 todos os alunos resolveram de forma adequada a questão, utilizaram da fórmula do Teorema de Pitágoras e concluíram a resolução obtendo resultado esperado. Por fim, com a questão do Refletindo da AT2 os alunos teriam de cogitar quais situações pode-se utilizar o Teorema de Pitágoras. A análise para esta questão foi satisfatória, pois a maioria dos alunos (aproximadamente 84% dos alunos) descreveu de forma adequada, compreendendo que o Teorema de Pitágoras pode ser utilizado para medir alturas, distâncias, entre outros. Os demais alunos responderam de forma parcialmente adequada, pois citaram situações possíveis de serem resolvidas, mas consideraram também situações em que ela não se aplica, como cálculo de "áreas" de triângulos retângulos (descrito por A2 e A8, por exemplo).

A partir dos resultados apresentados, podemos considerar que a apropriação do conhecimento se deu de forma satisfatória nesta subcategoria, pois os alunos que na atividade 1 (conhecimentos prévios) não souberam realizar a questão 5, demonstraram compreender o processo de construção da fórmula e o conceito do Teorema de Pitágoras, aplicando-a em situações de modo adequado no decorrer da SD. Juntamente com a análise interpretativa aqui realizada, no Quadro 20 apresentamos os dados quantitativos desta subcategoria, no qual observa-se que a maioria dos alunos respondeu de forma adequada, com exceção da AT1: Q5.

Quadro 20 – Dados quantitativos das unidades referentes a subcategoria Teorema de Pitágoras.

	Resposta adequada	**Resposta parcialmente adequada**	**Resposta inadequada**	**Não soube responder**
AT1: Q5	2	1	4	12
AT2: Q4a	17	2	0	0
AT2: Q4b	18	1	0	0
AT2: Q5	18	0	1	0
AT2: Q6	19	0	0	0
AT2: Q9	13	6	0	0
AT2: RF	16	3	0	0
AT3: Q1d	19	0	0	0
TOTAL	**123**	**13**	**4**	**12**
%	**81%**	**9%**	**3%**	**7%**

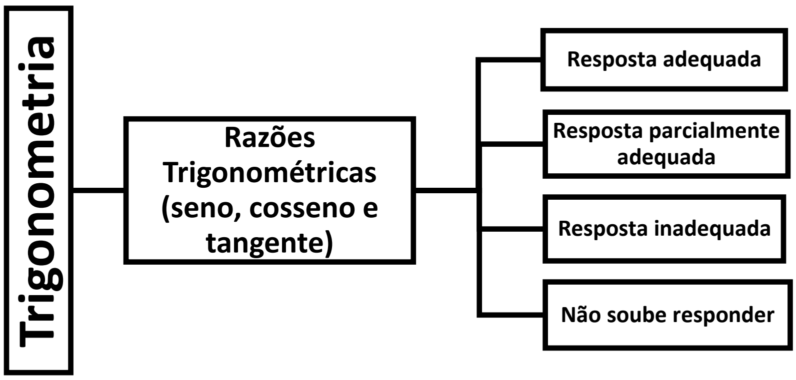
Fonte: Os autores (2018).

Com base nas afirmações de Santos (2011), é imprescindível que se conheça pelo menos uma demonstração do Teorema de Pitágoras, como foi realizado na SD. Este autor salienta ainda que além de ser um dos mais famosos conteúdos da Geometria Elementar, é também muito útil para problemas práticos, tornando-se assim "um excelente tema a ser aprofundado nas aulas de Matemática" (p. 2), e, além disso, em vista do objetivo a ser alcançado pela SD, o Teorema de Pitágoras serve de base para que os alunos compreendam o caminho percorrido para a construção do conhecimento das Funções Trigonométricas.

4.2.1.4 Subcategoria – Razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente)

Essa subcategoria compreende dados referentes às razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, apresentadas na Figura 42. As questões relacionadas a esta subcategoria envolvem conceitos para resolução de problemas e conceitos que caracterizam e diferenciam as razões trigonométricas.

Figura 42 - Categoria Trigonometria, subcategoria Razões Trigonométricas e unidades prévias.



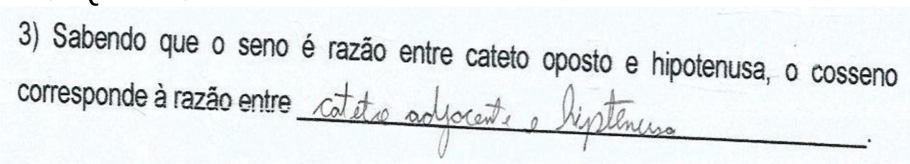
Fonte: Os autores (2018).

No decorrer das atividades da SD as questões sobre razões trigonométricas se caracterizam como: identificação de conhecimentos prévios dos alunos (AT1: Q6), formalização das razões trigonométricas (AT3: Q7, Q10) e, resolução de problemas (AT3: Q4, Q8, Q13). Ao analisá-las, constatou-se que somente a unidade "respostas inadequadas" não foi efetivada, como podemos observar no Quadro 21.

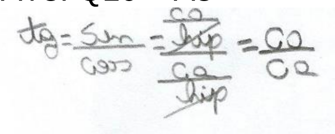
Quadro 21 - Categoria Trigonometria, subcategoria Razões Trigonométricas (seno, cosseno e tangente) e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

Resposta adequada: os alunos formalizaram de forma adequada as razões trigonométricas considerando os catetos e hipotenusa do triângulo retângulo, e realizaram os cálculos das razões trigonométricas de forma correta.

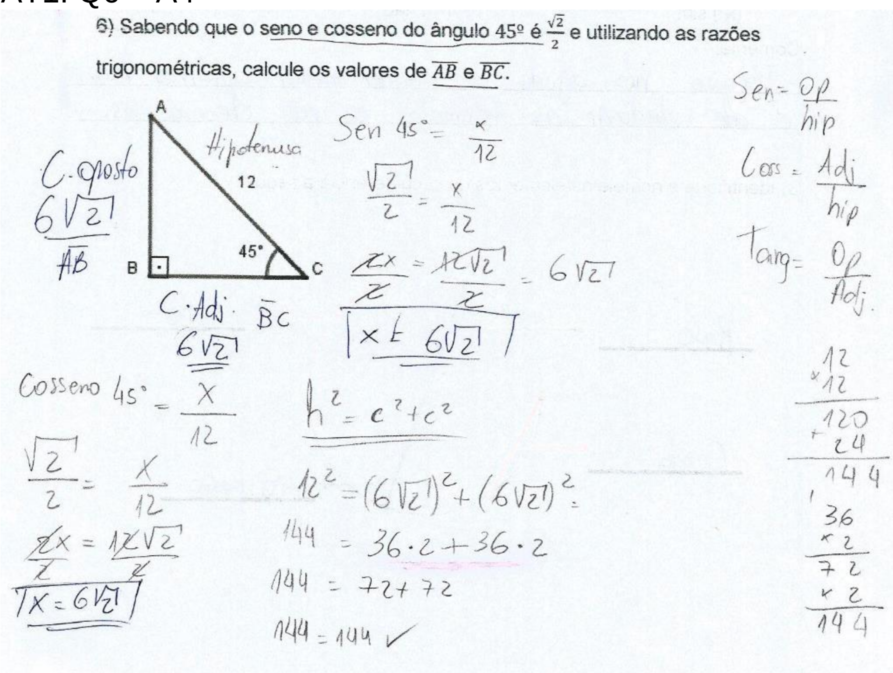
AT3: Q7 – A5


3) Sabendo que o seno é razão entre cateto oposto e hipotenusa, o cosseno corresponde à razão entre cateto adjacente e hipotenusa.

AT3: Q10 – A8


$$tg = \frac{Sen}{Cos} = \frac{\frac{co}{\cancel{hip}}}{\frac{ca}{\cancel{hip}}} = \frac{co}{ca}$$

AT1: Q6 – A4


6) Sabendo que o seno e cosseno do ângulo 45º é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e utilizando as razões trigonométricas, calcule os valores de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

$Sen = \frac{Op}{hip}$

$Cos = \frac{Adj}{hip}$

$Tang = \frac{Op}{Adj}$

$Sen\ 45° = \frac{x}{12}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{12}$

$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 6\sqrt{2}$

$\boxed{x = 6\sqrt{2}}$

$Cosseno\ 45° = \frac{x}{12}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{12}$

$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{\cancel{2}}$

$\boxed{x = 6\sqrt{2}}$

$h^2 = c^2 + c^2$

$12^2 = (6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2$

$144 = 36 \cdot 2 + 36 \cdot 2$

$144 = 72 + 72$

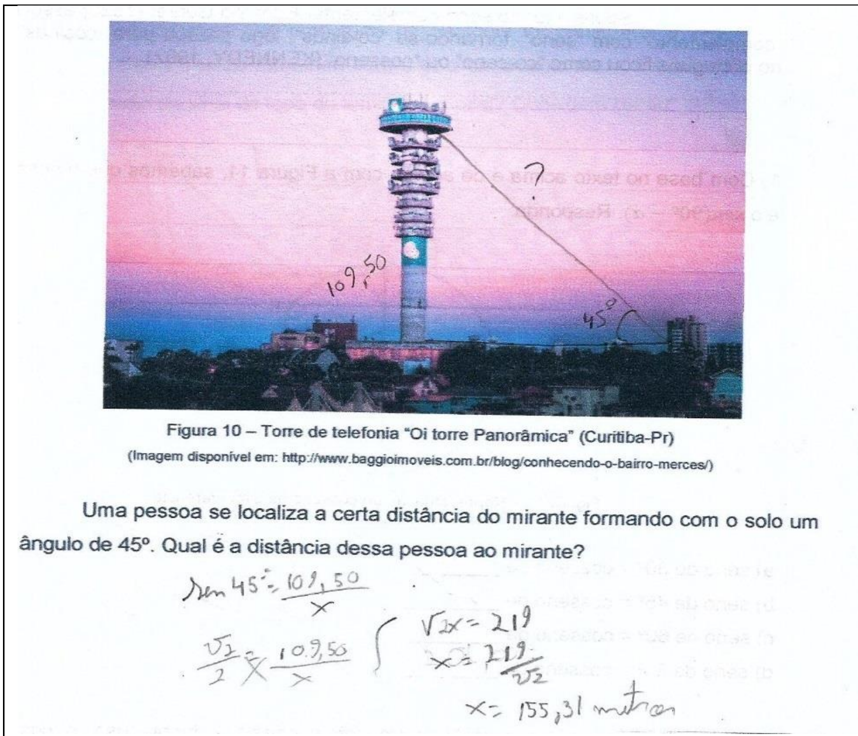
$144 = 144$ ✓

$12 \times 12 = 120 + 24 = 144$

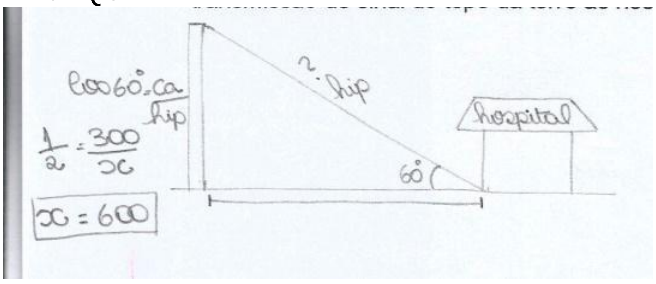
$36 \times 2 = 72$

$72 \times 2 = 144$

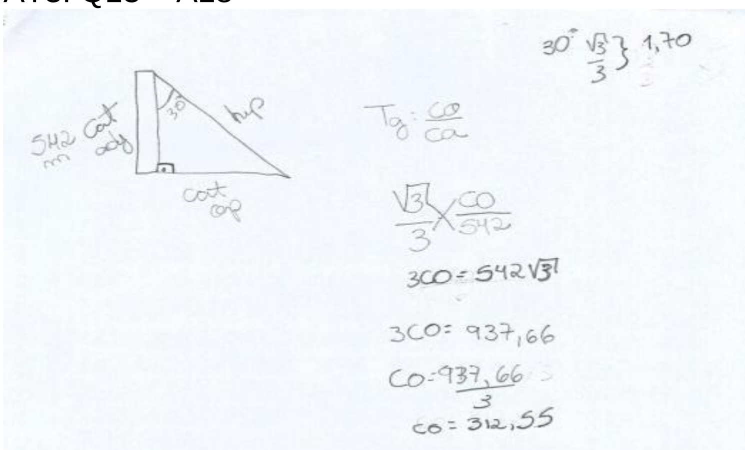
AT3: Q4 – A



AT3: Q8 – A14



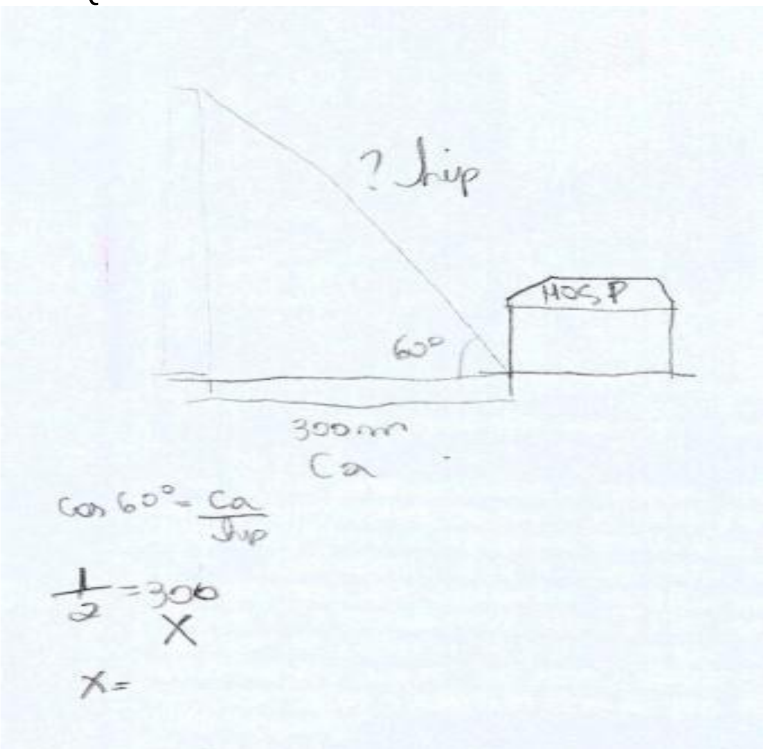
AT3: Q13 – A18



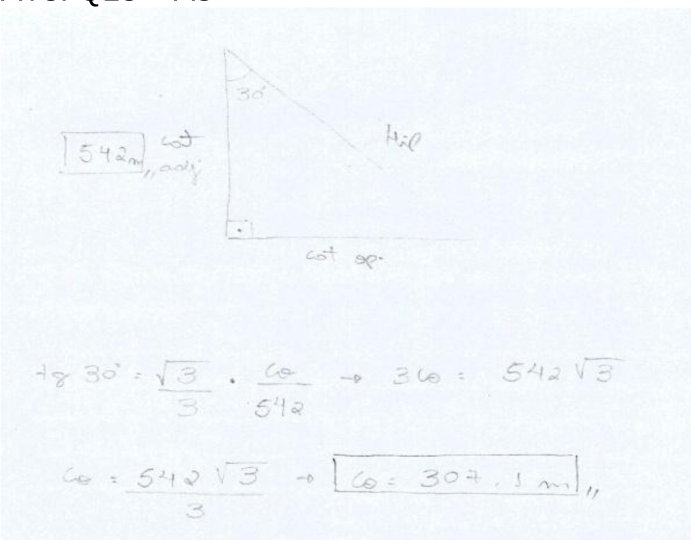
Síntese descritiva: a utilização das razões trigonométricas cosseno e tangente foi considerada adequada quando substituídas corretamente nos catetos e hipotenusa. A respeito dos cálculos utilizando as razões seno, cosseno e tangente os alunos fizeram as operações devidas resultando em respostas corretas.

Resposta parcialmente adequada: os alunos formalizaram de forma adequada as razões trigonométricas considerando os catetos e hipotenusa do triângulo retângulo, mas ao realizar o cálculo não apresentaram o resultado final adequado.

AT3: Q8 – A10



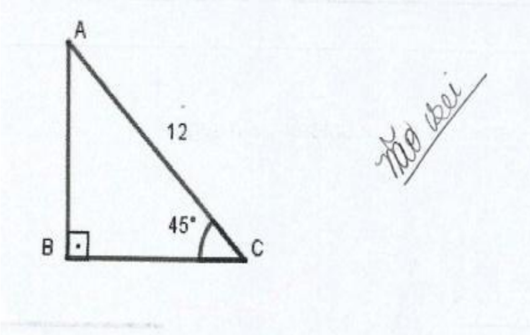
AT3: Q13 – A3



Síntese descritiva: nas Questões que demandavam calcular valores dos lados do triângulo retângulo, os alunos utilizaram das razões trigonométricas adequadas e as representaram adequadamente, porém ao realizarem os cálculos apresentaram algumas operações incorretas e/ou não concluíram a questão.

Não soube responder: os alunos não souberam/lembraram como resolver a questão por meio das razões trigonométricas.

AT1: Q6 – A17



Síntese descritiva: A Q6 da AT1 foi proposta aos alunos para identificar se os mesmos sabiam ou lembravam como resolver a questão e encontrar os valores numéricos dos lados do triângulo retângulo, cujo valor não era apresentado. Considerando que foram orientados a utilizar as razões trigonométricas, de um total de 19 alunos apenas 1 resolveu a questão, de modo que os demais descreveram que não sabiam resolver, tal fato pode ter ocorrido por não lembrarem ou não compreenderem as razões trigonométricas.

Fonte: Os autores (2018).

A análise desta subcategoria está ancorada em referenciais importantes do campo da Educação, como as Diretrizes Curriculares de Matemática, que afirmam:

> (...) aprender Matemática é mais do que manejar fórmulas, saber fazer contas ou marcar x nas respostas: é interpretar, criar significados, construir seus próprios instrumentos para resolver problemas, estar preparado para perceber estes mesmos problemas (...) (PARANÁ, 1990, p. 66).

Em busca desses ideais citados, a SD foi construída com finalidade a não fornecer equações prontas aos alunos, mas permitir que eles compreendam o processo de construção e as formalizem algebricamente, para a partir de então considerarem suas possíveis aplicações e desenvolverem a percepção das situações em que podem ser aplicadas. Portanto, nesta subcategoria foi analisado como o aluno realizou questões de cálculos e formalização das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

De início, com a Q6 da AT1, buscou-se identificar os conhecimentos prévios que os alunos tinham, notou-se que a maioria dos alunos apresentou dificuldade em identificar quando utilizar as razões e/ou em lembrar como era representada a razão seno, cosseno e tangente. Destacamos que apenas um aluno (A4) resolveu de forma correta tanto na representação das razões quanto no cálculo, ou seja, aproximadamente 95% dos alunos não haviam se apropriado deste conteúdo até então.

Neste sentido, destaca-se que de acordo com o Caderno de Expectativas e Aprendizagem do Estado do Paraná, o estudo sobre as razões trigonométricas está previsto para o 9º ano do Ensino Fundamental II (PARANÁ, 2012). Portanto, os alunos de 3º ano do Ensino Médio que participaram da pesquisa já estudaram este conteúdo anteriormente.

No decorrer da SD, foi trabalhado, com o auxílio da História, a construção e formalização das razões trigonométricas. Contudo, o processo histórico que interferiu na construção deste conhecimento será analisado na próxima Categoria. Nesta primeira categoria foi analisado somente se o aluno formalizou o conteúdo de forma adequada, parcialmente adequada, inadequado ou se não soube responder. Neste sentido, as respostas em sua maioria foram consideradas satisfatórias para esta análise, visto que na atividade 3, Q7 e Q10, todos os alunos formalizaram corretamente a razão cosseno e razão tangente, considerando os catetos e hipotenusa de forma adequada.

Com relação aos cálculos das razões trigonométricas por meio das situações problemas, as respostas obtidas também foram satisfatórias, visto que em comparação com a AT1: Q6, todos os alunos conseguiram desenvolver as questões problemas da atividade 3, ou seja, não obtivemos nenhuma “resposta inadequada” e/ou “não soube responder”. Na Q4 apenas o aluno A4 apresentou uma resposta considerada parcialmente adequada devido a uma operação matemática incorreta. Na Q8 as respostas dos alunos A2, A8 e A10 foram analisadas como parcialmente adequada, pois realizaram alguma operação incorreta e/ou não concluíram a questão. Por fim, na questão 13, aproximadamente 79% dos alunos responderam de forma adequada e apenas os alunos A3, A4, A7, A17 de forma parcial, pois não concluíram a resolução da questão.

Diante destes resultados, ficou evidente como os alunos progrediram no que se refere aos processos de construção, formalização das razões trigonométrica e identificação das situações problemas, pois na atividade 3 a maioria dos alunos resolveu as questões de forma adequada e a minoria obteve respostas parcialmente adequadas, de modo que nenhum aluno se enquadrou nas Unidades “resposta incorreta” e “não soube responder”. Portanto, concluímos que os resultados foram satisfatórios para esta subcategoria, conforme se observa no

Quadro 22, no qual destacamos quantitativamente o número de respostas de acordo com as unidades analisadas nesta subcategoria.

Quadro 22 - Dados quantitativos das unidades referentes a subcategoria Razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente).

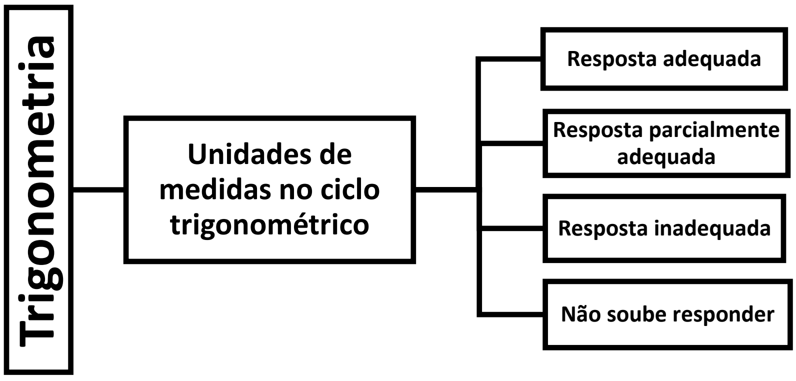
	Resposta adequada	Resposta parcialmente adequada	Não soube responder
AT1: Q6	1	0	18
AT3: Q4	18	1	0
AT3: Q7	19	0	0
AT3: Q8	16	3	0
AT3: Q10	19	0	0
AT3: Q13	15	4	0
TOTAL	**88**	**8**	**18**
%	**77%**	**7%**	**16%**

Fonte: Os autores (2018).

4.2.1.5 Subcategoria – Unidades de medidas no ciclo trigonométrico

Esta subcategoria se refere à análise das questões Q5, Q6 e Q7 da atividade 4 de acordo com as unidades prévias estabelecidas, como mostra a Figura 43. A proposta desta subcategoria foi analisar as unidades de medidas que usamos no ciclo trigonométrico, como graus, radianos e valores numéricos dos eixos x e y.

Figura 43 - Categoria Trigonometria, subcategoria Unidades de medidas no ciclo trigonométrico e unidades prévias.



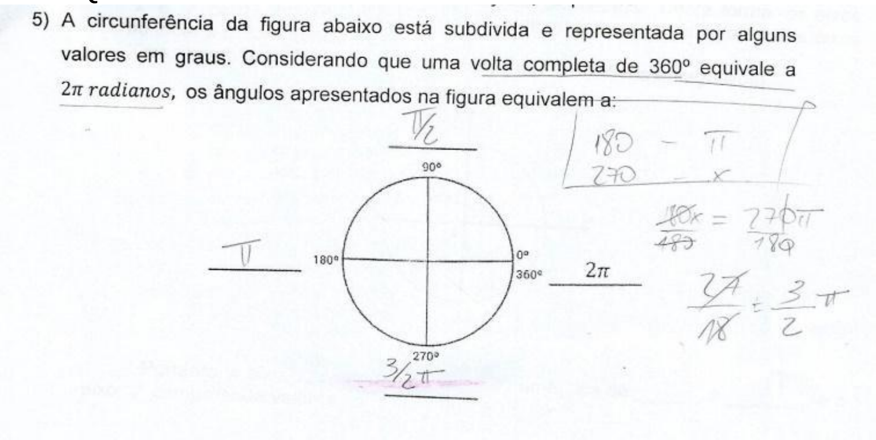
Fonte: Os autores (2018).

Ao realizar a análise dos dados desta subcategoria, identificou-se que foram efetivadas as unidades “resposta adequada” e “resposta parcialmente adequada”, como mostra o Quadro 23.

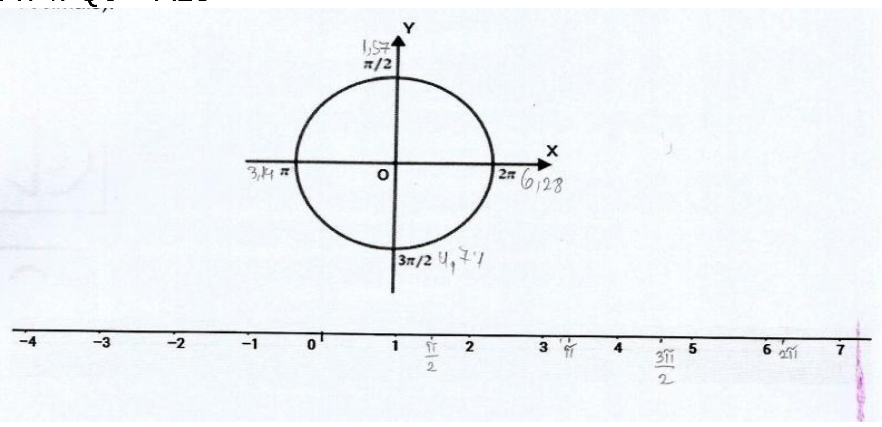
Quadro 23 - Categoria Trigonometria, subcategoria Unidade de medidas no ciclo trigonométrico e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

Resposta adequada: os alunos souberam representar graus em radianos no ciclo trigonométrico, identificaram os radianos de forma linear e indicaram os valores numéricos nos eixos “x” e “y” corretamente.

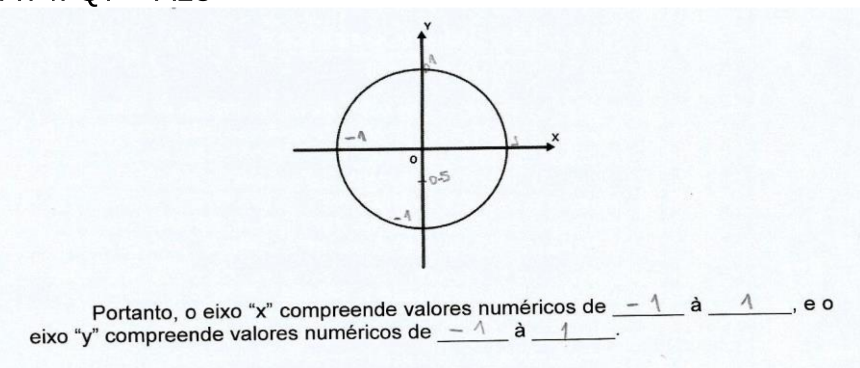
AT4: Q5 – A4



AT4: Q6 – A15



AT4: Q7 – A18



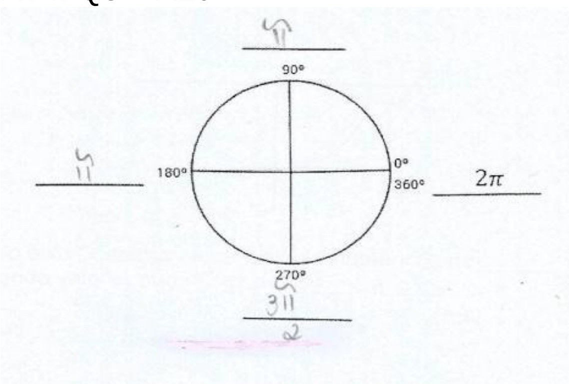
Síntese descritiva: A representação de graus para radianos se deu forma adequada de acordo que cada grau corresponde a uma unidade diferente em radianos em determinadas localizações no ciclo trigonométrico, como foi demostrado por A4.

A representação dos radianos pode ser de forma angular e linear. Dada a representação angular, realizou-se a representação linear de forma correta na AT4 Q6, como resolvido pelo aluno A15, por exemplo.

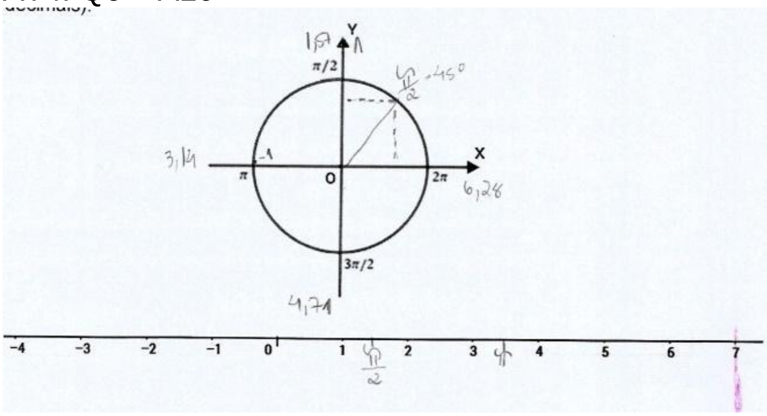
Em relação à representação dos valores numéricos nos eixos “x” e “y”, os mesmos foram localizados de forma correta com sinais de positivo e negativos adequados, conforme resolução do aluno A18.

Resposta parcialmente adequada: os alunos souberam representar alguns dos graus em radianos no ciclo trigonométrico e identificaram alguns dos radianos de forma linear, além de indicar os valores numéricos nos eixos “x” e “y” de forma parcialmente adequada.

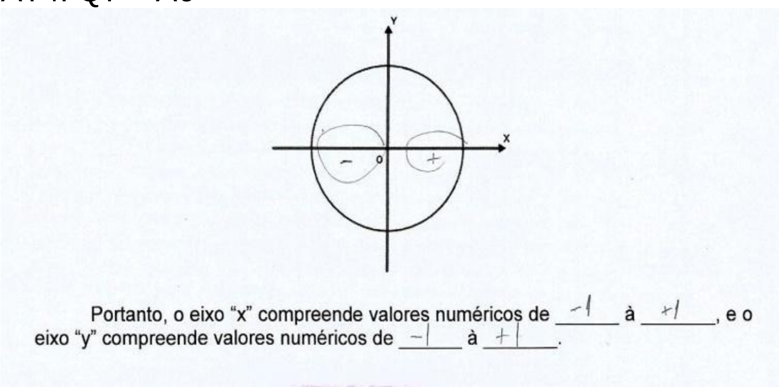
AT4: Q5 – A10



AT4: Q6 – A10



AT4: Q7 – A6



Síntese descritiva: A representação da unidade de medidas graus para radianos na Q5 se deu forma parcialmente adequada, ou seja, algumas representações estão incorretas e outras corretas, pois cada grau representa uma unidade diferente em radianos. No excerto apresentado, o aluno A10 denominou o mesmo valor em radianos para dois ângulos correspondentes diferentes, o que gerou a inadequação de uma das respostas. A representação dos radianos pode ser de forma angular e linear. Dada a representação angular, o aluno A10 por exemplo, realizou a representação linear de alguns radianos, resultando em uma resolução parcial, pois não representou na reta numérica os demais radianos solicitados. Em relação à representação dos valores numéricos nos eixos “x” e “y” na Q7, faltaram algumas representações e/ou os sinais de positivo e negativo estão inadequados. No caso do aluno A6, o mesmo respondeu de forma adequada a questão, porém de forma parcial, pois não representou os valores no ciclo trigonométrico como foi solicitado pela questão.

Fonte: Os autores (2018).

O estudo dos elementos do ciclo trigonométrico é importante para a Trigonometria, como afirmam os pesquisadores Almeida, Oliveira e Cavalcante ao dizerem que “A grande vantagem de se estudar trigonometria aplicada ao círculo, diferentemente do estudo aplicado no triângulo retângulo, é a capacidade que temos de calcular razões trigonométricas de ângulos superiores à 90º” (2014, p. 5). Nesse sentido, na SD demos ênfase para o estudo das unidades de medidas existentes no ciclo trigonométrico, dedicando a atividade 4 especificamente para esse fim.

As questões presentes na AT4 se referiam à representação de graus em radianos, radianos angular e linear, além da representação dos valores numéricos dos eixos “x” e “y”. Assim como na SD, o estudo dos radianos é considerado um dos conteúdos previstos pelo Caderno de Expectativas e Aprendizagem do Estado do Paraná a serem estudados no Ensino Médio, além de também ser considerado como uma unidade de medida padrão para os estudos das Funções Trigonométricas (PARANÁ, 2012; QUINTANEIRO, GIRALDO, PINTO, 2010). Com relação aos graus e valores numéricos dos eixos, estes são considerados conhecimentos prévios dos alunos, pois são orientados a serem estudados no 7º ano e 8º ano. Ainda assim, foram estudados na atividade 4 para que juntamente com os estudos dos radianos possam favorecer posteriormente uma melhor compreensão das Funções Trigonométricas no ciclo trigonométrico e sua representação gráfica. Portanto, para esta subcategoria foram analisadas as Q5, Q6 e Q7 da AT4, como podem ser observadas a seguir.

Na Q5, tendo em vista que a representação em graus já foi dada, o aluno deveria apresentar o correspondente em radianos. De acordo com a análise das respostas, apenas dois alunos (A7 e A10) realizaram de forma parcialmente adequada, pois algumas representações estavam incorretas por representarem graus diferentes com os mesmos valores em radianos. Todos os demais alunos representaram os valores dos radianos correspondentes aos graus de forma adequada no ciclo trigonométrico.

Considerando que na questão 5 os alunos deveriam representar os radianos de forma angular, na questão 6 deveriam representar os radianos de forma linear. A partir das análises realizadas, os alunos A7 e A10 não resolveram por completo a questão 6, ou seja, o que fizeram estava adequado, porém faltou concluir a resolução, caracterizando respostas parcialmente adequadas. Com relação aos demais alunos, todos realizaram as representações em radianos de forma adequada, resolvendo também por completo a Questões. Portanto, em ambas as questões mencionadas (Q5 e Q6), obtivemos aproximadamente 90% de respostas adequadas.

No que se referem à Q7, sabendo que o ciclo trigonométrico é composto também pelos eixos x e y, os alunos deveriam identificar quais valores os eixos compreendem. A partir das análises feitas, a 12 alunos responderam de forma adequada (aproximadamente 63%), localizando os valores e sinais corretos. As demais respostas foram caracterizadas como “resposta parcialmente adequada”, pois faltaram as representações no ciclo trigonométrico e/ou os sinais de positivo e negativo para os valores estavam inadequados.

Apesar destes últimos resultados apresentados, com esta análise foi possível observar que maioria dos alunos compreendeu bem as unidades de medidas utilizadas no ciclo trigonométrico, utilizando-se dos valores adequados e localizando-os de forma correta. Este é considerado um dado importante para a aplicação da SD, pois o estudo das unidades de medidas que compõem o ciclo trigonométrico precisa ser compreendido a fim dos alunos avançarem para as Funções Trigonométricas.

Para uma mensuração das respostas adequadas e parcialmente adequadas, o Quadro 24 apresenta a quantificação desta subcategoria.

Quadro 24 – Dados quantitativos das Unidades referentes a Subcategoria Unidades de medidas no ciclo trigonométrico.

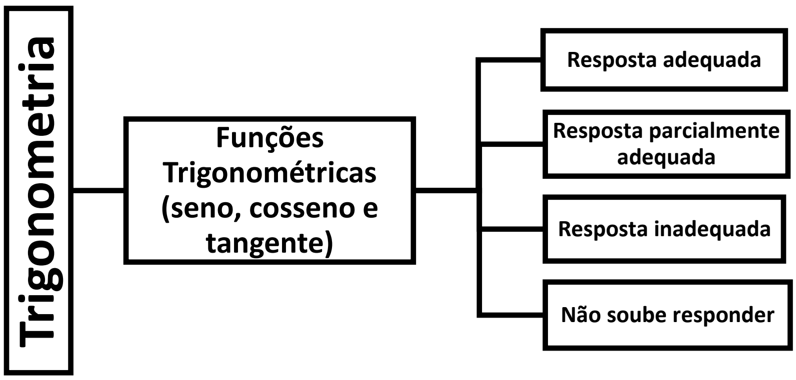
	Resposta adequada	Resposta parcialmente adequada
AT4: Q5	17	2
AT4: Q6	17	2
AT4: Q7	12	7
TOTAL	**46**	**11**
%	**80%**	**20%**

Fonte: Os autores (2018).

4.2.1.6 Subcategoria – Funções Trigonométricas (seno, cosseno e tangente)

A subcategoria "Funções Trigonométricas" analisou as Q1, Q2, RF1 e RF2 referentes à atividade 5 da SD, que por vez são questões para os alunos identificarem os valores nos eixos x e y correspondentes as funções seno, cosseno e tangente para determinados valores em radianos no ciclo trigonométrico. Esta análise foi possível por meio das unidades prévias estabelecidas, como mostra a Figura 44.

Figura 44 - Categoria Trigonometria, subcategoria Funções Trigonométricas (seno, cosseno e tangente) e unidades prévias.

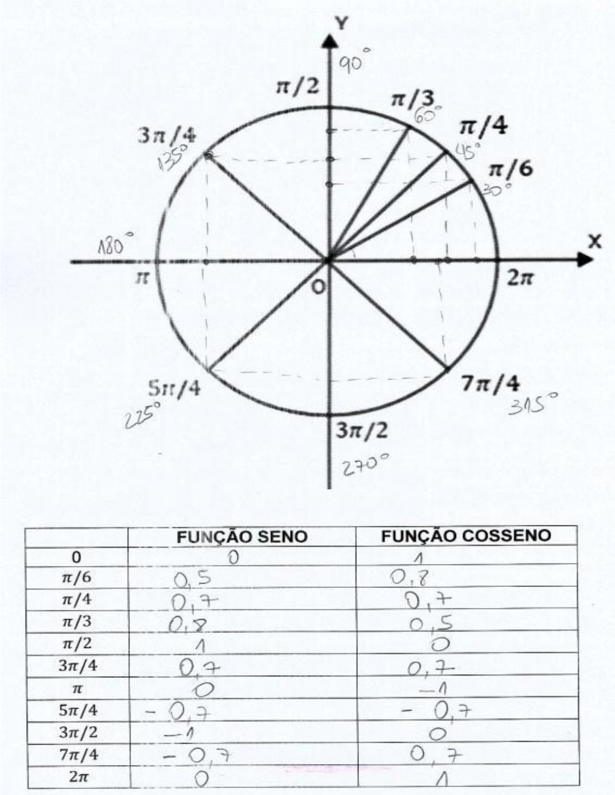


Fonte: Os autores (2018).

Dentre as unidades prévias estabelecidas foram efetivadas "respostas adequada" e "resposta parcialmente adequada", sendo que as outras unidades não foram efetivas, como mostra no Quadro 25.

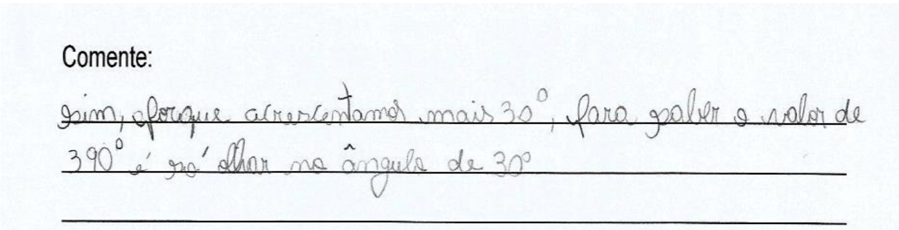
Quadro 25 - Categoria Trigonometria, subcategoria Funções Trigonométricas (seno, cosseno e tangente) e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

<table>
<tr><td>Resposta adequada: os alunos representaram de forma adequada os valores das Funções Trigonométricas seno, cosseno e tangente nos eixos “x” e “y” de acordo com os valores em radianos no ciclo trigonométrico, e para graus maiores que 360º e 2π descreveram de forma adequada como é possível encontrar o valor da função.</td></tr>
<tr><td>AT5: Q1 – A4

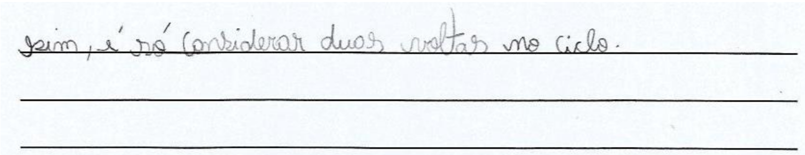


	FUNÇÃO SENO	FUNÇÃO COSSENO
0	0	1
π/6	0,5	0,8
π/4	0,7	0,7
π/3	0,8	0,5
π/2	1	0
3π/4	0,7	0,7
π	0	−1
5π/4	− 0,7	− 0,7
3π/2	−1	0
7π/4	− 0,7	0,7
2π	0	1

AT5: RF1 – A1

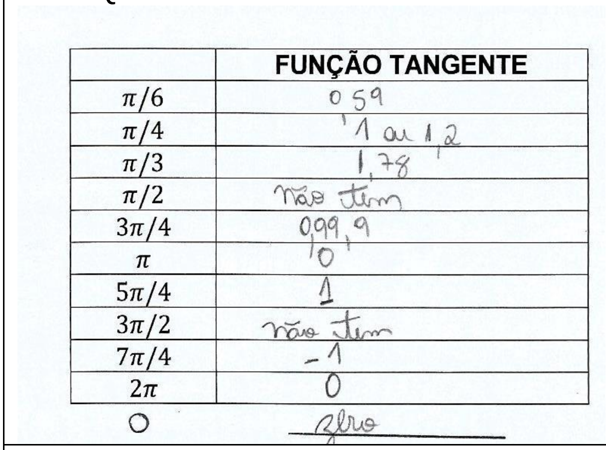

Comente:
sim, porque acrescentamos mais 30°, para saber o valor de 390° é só olhar no ângulo de 30°

AT5: RF2 – A1


sim, é só considerar duas voltas no ciclo.</td></tr>
<tr><td>Síntese descritiva: Foi identificado cada valor referente aos radianos das funções seno, cosseno e tangente nos eixos “x” e “y” de forma adequada, fazendo correspondência da circunferência com os eixos do ciclo trigonométrico, conforme resposta do aluno A4.
No que tange a possibilidade de encontrar valores das Funções Trigonométricas para graus maiores que 360º e 2π, os alunos souberam responder de forma adequada, ou seja, é possível contanto que trace novamente a volta do ciclo trigonométrico, como o descreveu o aluno A1.</td></tr>
</table>

Resposta parcialmente adequada: os alunos representaram alguns dos valores das Funções Trigonométricas seno, cosseno e tangente nos eixos “x” e “y” de acordo com os valores em radianos no ciclo trigonométrico de forma adequada.

AT5: Q2 – A10



	FUNÇÃO TANGENTE
$\pi/6$	0,59
$\pi/4$	1 ou 1,2
$\pi/3$	1,78
$\pi/2$	não tem
$3\pi/4$	0,99,9
π	0
$5\pi/4$	1
$3\pi/2$	não tem
$7\pi/4$	-1
2π	0
0	zero

Síntese descritiva: Foram identificados os valores nos eixos “x” e “y” referente aos radianos para as funções seno, cosseno e tangente fazendo correspondência da circunferência com os eixos do ciclo trigonométrico, porém de forma parcialmente adequada, pois alguns valores estavam com sinais inadequados e/ou alguns radianos ficaram sem representação dos valores correspondentes.

Fonte: Os autores (2018).

O estudo sobre as Funções Trigonométricas se iniciou na atividade 5, a qual foi analisada por esta subcategoria. De acordo com as Diretrizes Curriculares de Matemática e pelo Caderno de Expectativas e Aprendizagem do Estado do Paraná as Funções Trigonométricas devem ser estudadas no Ensino Médio (PARANÁ, 2008; PARANÁ 2012). Como outros tipos de funções, as Funções Trigonométricas possuem representações gráficas, mas, além disso, elas também podem ser representadas no ciclo trigonométrico (SOUZA, GARCIA, 2016).

Ao analisar esta subcategoria foi possível detectar nas questões Q1 e Q2 da AT5 que a maioria dos alunos apresentou respostas adequadas, correspondendo aproximadamente a 74% e 90%, respectivamente. Com o auxílio do GeoGebra, os alunos identificaram os valores numéricos dos eixos x e y correspondentes a cada valor em radianos para as funções seno, cosseno e tangente. Estes valores e os sinais (positivo e negativo) variam, de modo que a maioria dos alunos identificou os valores aproximados (visto que o GeoGebra apresenta valores decimais) com sinais adequados para cada radiano. Os demais alunos responderam as questões de forma parcialmente adequada, visto que não concluíram a resolução e/ou usaram de sinais e valores numéricos inadequados.

Para os RF1 e RF2 desta mesma atividade, pôde-se observar por meio da análise que todos os alunos descreveram respostas adequadas, ou seja, refletiram e chegaram à conclusão de que para encontrar um valor maior que 360º e 2π é necessário traçar novamente a volta do ciclo trigonométrico. Durante a aplicação os alunos discutiram entre eles essas reflexões.

Com base nesta análise, observa-se que os resultados alcançados para esta subcategoria foram satisfatórios, pois os alunos compreenderam como encontrar e representar os valores para as Funções Trigonométricas no ciclo trigonométrico.

O Quadro 26 mostra quantitativamente os alunos que responderam de acordo com as unidades efetivadas, evidenciando o citado acima.

Quadro 26 - Dados quantitativos das Unidades referentes a subcategoria Funções Trigonométricas (seno, cosseno e tangente)

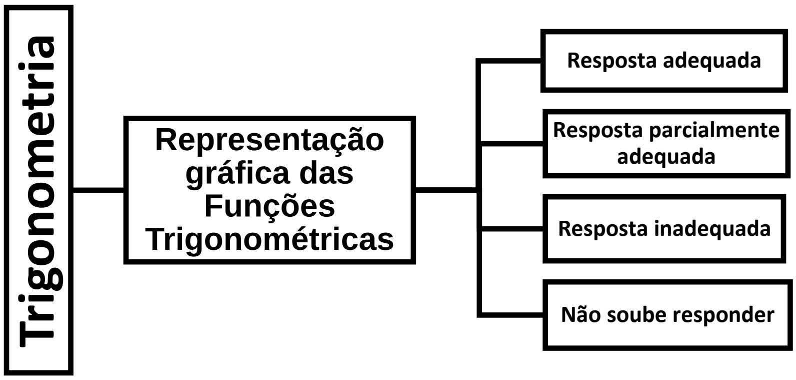
	Resposta adequada	**Resposta parcialmente adequada**
AT5: Q1	14	5
AT5: Q2	17	2
AT5: RF1	19	0
AT5: RF2	19	0
TOTAL	**69**	**7**
%	**90%**	**10%**

Fonte: Os autores (2018).

4.2.1.7 Subcategoria – Representações gráficas das Funções Trigonométricas

Nesta subcategoria de análise foram observadas as questões 1, 2 e 3 da atividade 6, as quais tratavam das representações gráficas das Funções Trigonométricas, segundo as unidades previamente estabelecidas apresentadas na Figura 45.

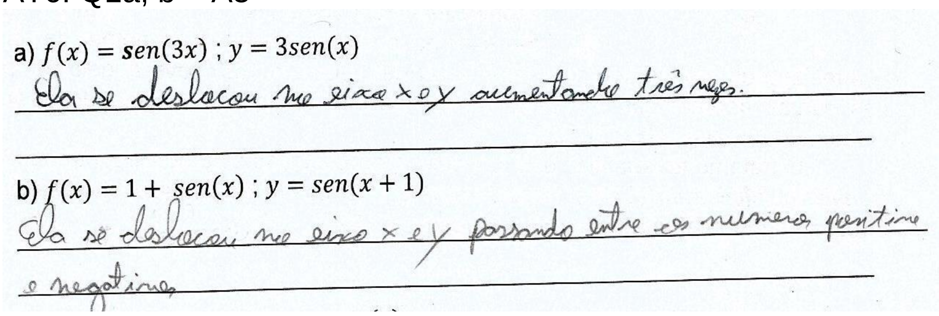
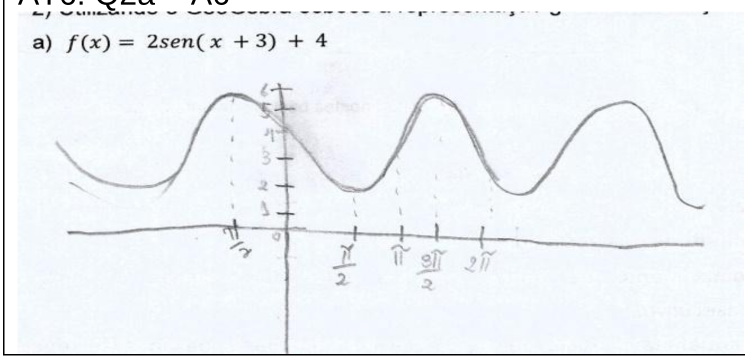
Figura 45 - Categoria Trigonometria, subcategoria Representações gráficas das funções seno, cosseno e tangente e unidades prévias.



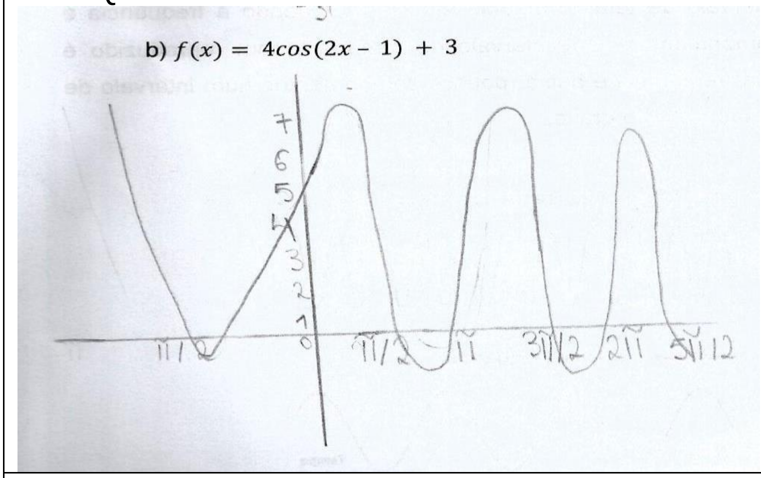
Fonte: Os autores (2018).

Com a análise realizada obteve-se efetivação de todas as unidades prévias estabelecidas, como mostra o Quadro 27.

Quadro 27 - Categoria Trigonometria, subcategoria Representações gráficas das Funções Trigonométricas e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

Resposta adequada: os alunos identificaram as mudanças que ocorreram nas representações gráficas das funções seno, cosseno e tangente utilizando de termos adequados e representaram o esboço das funções de forma adequada destacando o comportamento e os pontos que a função interceptou nos eixos “x” e “y”.
AT6: Q1a, b – A5  AT6: Q2a – A6 

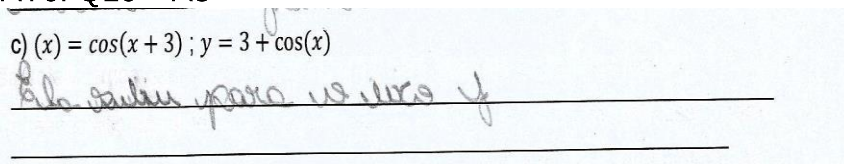
AT6: Q2b – A2



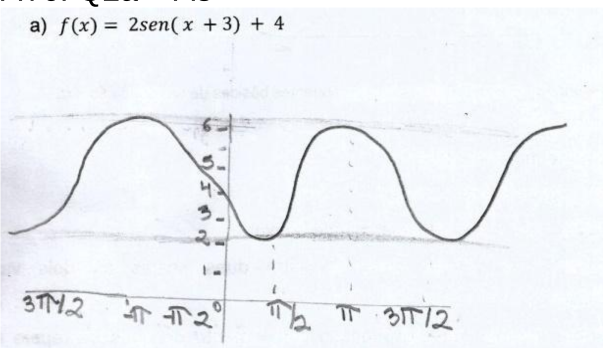
Síntese descritiva: conforme se altera os valores dos coeficientes da função se altera seu comportamento no gráfico, tais como deslocar, ampliar e comprimir. Estas mudanças no comportamento das funções foram identificadas adequadamente, informando as alterações correspondentes. Além disso, ao esboçar as funções trigonométricas, foi desenhado o comportamento adequado destacando os pontos que a função intercepta nos eixos “x” e “y”.

Resposta parcialmente adequada: o aluno identificou que ocorreram mudanças nas representações gráficas das funções seno, cosseno e tangente, mas não especificou qual foi o tipo de mudança que ocorreu. Em relação à representação gráfica das funções, identificou apenas alguns pontos em que a função interceptou no eixo “x” e/ou “y”.

AT6: Q1c – A8



AT6: Q2a – A8



AT6: Q3 – A9

Coeficientes	Ocorreu	Componente da onda
A	alterou o eixo y	alterou a crista e o vale
B	alterou o eixo y	alterou a amplitude
C	alterou o eixo x	aumento a frequência
D	deslocando no eixo x	interfere no início e no fim do [illegible]

Síntese descritiva: conforme são alterados os coeficientes da função se altera seu comportamento gráfico, podendo ocorrer alterações, tais como deslocar, ampliar e comprimir. Estas mudanças no comportamento das funções foram identificadas com o termo “alterou”. Contudo, não foi especificado qual o tipo de alteração que ocorreu. Além disso, o esboço da função foi apresentado de forma incompleta, apesar do comportamento adequado, de modo que foram identificados apenas alguns pontos em que a função interceptou o eixo “x” e/ou “y”.

Resposta inadequada: os alunos identificaram de forma incoerente as mudanças que ocorreram nas representações gráficas das funções seno, cosseno e tangente, além de representar de forma inadequada o esboço das funções, ou seja, não consideraram comportamento adequado e os pontos em que a função interceptou nos eixos “x” e “y”.

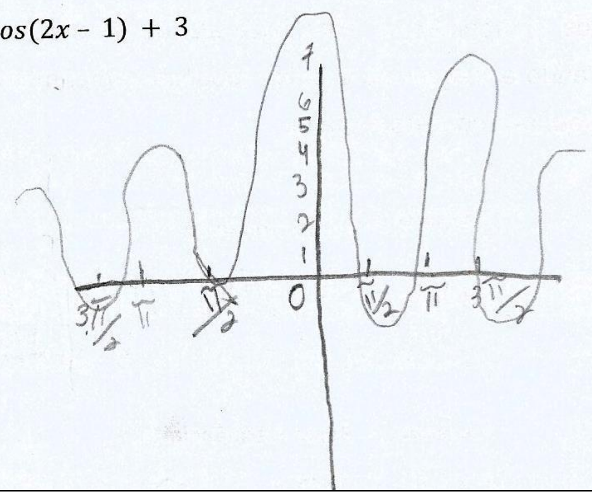
AT6: Q1f – A13

f) $(x) = (x + 2)$; $f(x) = 2 + tg(x)$

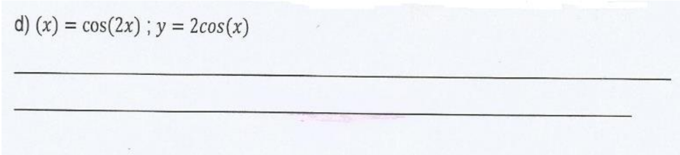
Ela aumenta no eixo y

AT6: Q2b – A17

b) $f(x) = 4cos(2x - 1) + 3$



Síntese descritiva: o uso de terminologias inadequadas caracterizou respostas inadequadas, pois para uma função que “deslocou” o gráfico, os alunos caracterizaram que “aumentou”, considerando como resposta inadequada, devido a diferença. Sobre as representações gráficas, o esboço apresentado pelo aluno não interceptou os devidos pontos nos eixos “x” e “y”, caracterizando que foram

esboçadas aleatoriamente.
Não soube responder: o aluno deixou em branco o item da questão.
AT6: Q1D – A15  d) $(x) = \cos(2x)$; $y = 2cos(x)$
Síntese descritiva: o aluno A15 não respondeu a Q1d, sendo caracterizado assim que não soube responder.

Fonte: Os autores (2018).

O conteúdo presente nas questões da atividade 6, são todas referentes a representações gráficas das funções seno, cosseno e tangente, sendo este elemento importante no estudo das Funções Trigonométricas, pois proporciona uma interpretação sobre a função e favorece a compreensão dos significados que a mesma possui. Neste sentido, vale ressaltar que de acordo com as Diretrizes Curriculares de Matemática: “o estudo das funções ganha relevância na leitura e interpretação da linguagem gráfica, favorecendo a compreensão do significado das variações das grandezas envolvidas” (PARANÁ, 2008, p. 59).

Com relação à compreensão e interpretação das representações gráficas, foram analisadas as repostas que os alunos atribuíram às questões 1 e 3, as quais serão apresentados a seguir.

A partir dos excertos analisados da questão 1, itens “a”, ”b”, ”c”, ”d”, ”e” e “f” da atividade 6, pudemos aferir que todas as unidades foram efetivas, se sobressaindo a “resposta adequada” pelo fato dos alunos identificaram as mudanças que ocorreram entre as funções no gráfico, sendo estas mudanças: deslocar, ampliar e alterar a posição do comportamento da função trigonométrica. As “respostas parcialmente adequadas” ocorreram com mais frequência na Q1c e Q1d, pois na Q1c os alunos identificaram a mudança que ocorreu no eixo y, porém não notaram seu deslocamento no eixo x e, na Q1d os alunos identificaram que a função ampliou, mas não especificaram em qual eixo isso ocorreu.

Em relação à questão Q1f, notou-se que todos os alunos se caracterizaram na unidade “resposta inadequada”, visto que usaram de terminologia inadequada, pois a função apenas se deslocou e os alunos responderam que a função aumentou, resultando em terminologias diferentes em seus significados gráficos.

No Quadro 28 adiante podemos observar quantitativamente os alunos que responderam de acordo com cada unidade. Observa-se que a maioria dos alunos apresentou respostas adequadas para os itens da questão 1 desta subcategoria, pois 40% responderam de forma adequada, 37% de responderam de forma parcialmente adequada e 23% responderam de forma inadequada, sendo considerado este um resultado satisfatório para a análise desta subcategoria.

Na questão 3 foi apresentado um fenômeno aplicado ao estudo das Funções Trigonométricas, como orienta as Diretrizes Curriculares de Matemática:

> As Abordagens do Conteúdo Funções no Ensino Médio devem ser ampliadas e aprofundadas de modo que o aluno consiga identificar regularidades, estabelecer generalizações e apropriar-se da linguagem matemática para descrever e interpretar fenômenos ligados à Matemática e a outras áreas do conhecimento (PARANÁ, 2008, p. 59).

O fenômeno estudado neste caso foi onda sonora. Ao analisar a questão referente a esse assunto, pôde-se verificar que 100% dos alunos responderam de forma parcialmente adequada as alternativas “a”, “b” e “c” sobre o comportamento da função e a representação de sua onda sonora (se deslocou, ampliou ou comprimiu), conforme se observa no Quadro 28. Houve alunos que descreveram apenas que a função simplesmente alterou, faltando especificar o que de fato foi alterado no comportamento da função. Entretanto, 63% dos alunos analisados apresentaram “respostas adequadas” na alternativa “d” da questão Q3 da atividade 6. Em relação às quais componentes da onda foram alterados (crista, vale, amplitude e frequência) todos os alunos responderam corretamente. As unidades “resposta inadequada” e “não soube responder” não foram efetivas nesta questão.

No que se refere à questão 2, itens “a” e “b”, os alunos deveriam esboçar as Funções Trigonométricas solicitadas. A partir da análise realizada, observa-se que ocorreu a unidade “resposta inadequada” para a maioria dos alunos, ou seja, 63% dos alunos, visto que não localizaram no gráfico de maneira adequada os pontos que intercepta nos eixos x e y. Para alunos cujas respostas foram parcialmente adequadas, não conseguiram interceptar adequadamente um ou outro ponto nos eixos, e para as respostas adequadas os alunos A6, A12, A18, A2, A5, A16 representaram o comportamento da função de forma adequada, interceptando os devidos pontos nos eixos. Na unidade “não soube responder” não houve respostas que a caracterizassem.

Para a questão 2, nota-se que ocorreu com mais frequência a unidade “respostas inadequadas”, demonstrando resultados poucos satisfatórios para esta questão. A justificativa que encontramos para essa dificuldade apresentada pelos alunos nos mostra o quanto é difícil esboçar manualmente um gráfico, sendo que o uso do software viabiliza mais essa representação.

Quadro 28 - Dados quantitativos das unidades referentes a subcategoria Representações gráficas Funções Trigonométricas

	Resposta adequada	**Resposta parcialmente adequada**	**Resposta inadequada**	**Não soube responder**
AT6: Q1a	15	3	1	0
AT6: Q1b	8	7	4	0
AT6: Q1c	0	12	7	0
AT6: Q1d	0	16	2	1
AT6: Q1e	19	0	0	0
AT6: Q1f	0	0	19	0
AT6: Q2a	3	2	14	0
AT6: Q2b	5	4	10	0
AT6: Q3a	0	19	0	0
AT6: Q3b	0	19	0	0
AT6: Q3c	0	19	0	0
AT6: Q3d	12	7	0	0
TOTAL	**62**	**108**	**57**	**1**
%	**27%**	**47,5%**	**25%**	**0,5%**

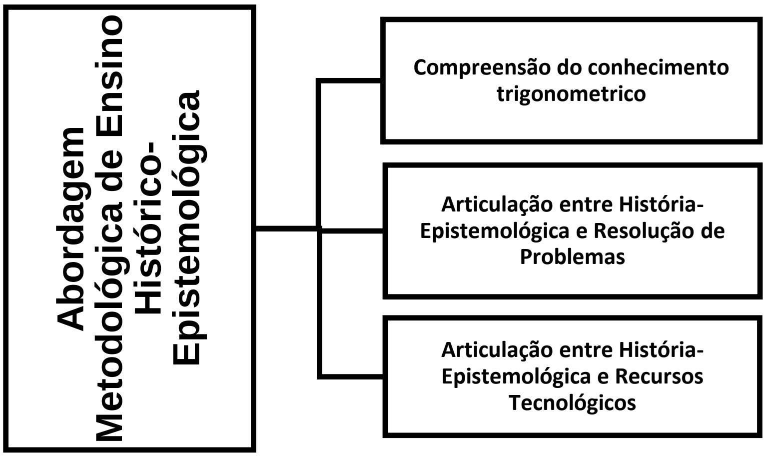
Fonte: Os autores (2018).

Como podemos observar no Quadro 28 que demonstra de forma geral quantitativamente os resultados, a unidade “resposta parcialmente adequada” sobressaiu para esta subcategoria.

4.2.2 Categoria – Abordagem Metodológica de Ensino Histórico-Epistemológica

A segunda categoria de análise visou identificar se o uso da Abordagem metodológica de ensino Histórico-Epistemológica presente na SD contribuiu para a compreensão do conhecimento Trigonométrico por parte dos alunos. Contudo, no decorrer da SD se fez necessário articular a resolução de problemas e recursos tecnológicos com esta metodologia. Portanto, foi necessário definir novas subcategorias para apurar melhor os dados oriundos da aplicação da SD, como apresentado na Figura 46.

Figura 46 - Categoria Abordagem Metodológica de Ensino Histórico-Epistemológica, com suas respectivas subcategorias.



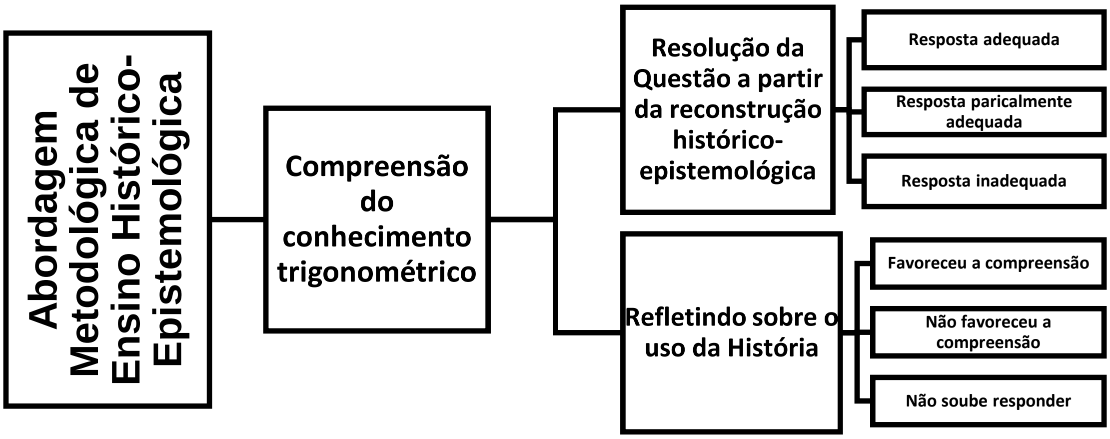
Fonte: Os autores (2018).

Nestas subcategorias foram necessárias acrescentar subcategorias subsequentes a elas devido que dentre as questões havia questões em que os alunos deveriam resolvê-las e outras que deveriam descrever suas reflexões, sendo estes aspectos diferentes a serem analisados por uma mesma subcategoria. A seguir será detalhada cada Subcategoria com suas respectivas unidades e as análises realizadas.

4.2.2.1 Subcategoria I – Compreensão do conhecimento trigonométrico

Para a subcategoria “Compreensão do conhecimento trigonométrico” foram elencadas outras duas subcategorias: “Resolução da questão a partir da reconstrução histórico-epistemológica” e “Refletindo sobre o uso da História”, como mostra a Figura 47. Esta decisão se justifica tendo em vista que a partir da Abordagem Metodologia de Ensino Histórico-Epistemológica utilizada para construir a SD, foram elaboradas questões em que os alunos teriam contato com o desenvolvimento histórico do conhecimento e questões em que os alunos pudessem refletir a respeito dessa metodologia utilizada dando suas opiniões particulares. Portanto, se fez necessário separar estas questões em subcategorias diferentes, mas com um objetivo em comum, a compreensão do conhecimento trigonométrico dos alunos. Para isto, foram elencadas unidades prévias para análise, conforme apresentado na Figura 47.

Figura 47 - Categoria Abordagem Metodológica de Ensino Histórico-Epistemológica, subcategoria I – Compreensão do conhecimento trigonométrico; subcategoria II – Resolução da questão a partir da reconstrução histórico-epistemológica; Refletindo a respeito do uso da História; além das unidades prévias.



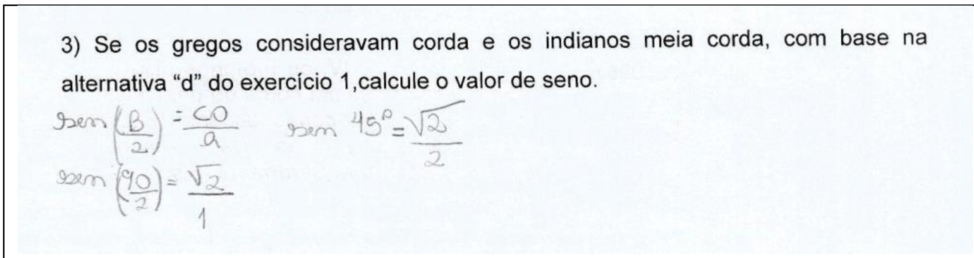
Fonte: Os autores (2018).

4.2.2.1.1 Subcategoria II – Resolução da questão a partir da reconstrução histórico-epistemológica

Nesta Subcategoria foram analisadas as questões: Q1 da AT2; Q1, Q2, Q3, Q5, Q6, Q9, Q12 da AT3; Q7 da AT4 e Q1 e Q2 da AT5. Essas oportunizaram o contato dos alunos com o desenvolvimento histórico da trigonometria, algo que habitualmente os livros didáticos não oferecem. Os excertos são apresentados no Quadro 29.

Quadro 29 - Categoria Abordagem Metodológica de Ensino Histórico-Epistemológica, subcategoria I – Compreensão do conhecimento trigonométrico; subcategoria II – Resolução da questão a partir da reconstrução histórico-epistemológica; unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

Resposta adequada: de acordo com o trecho histórico apresentado na SD os alunos interpretaram e resolveram a questão de forma adequada.
AT3: Q3 – A1


3) Se os gregos consideravam corda e os indianos meia corda, com base na alternativa “d” do exercício 1,calcule o valor de seno.

$\text{sen}\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{co}{a}$ $\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}\left(\frac{90}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{1}$

AT3: Q5 e Q6 – A4

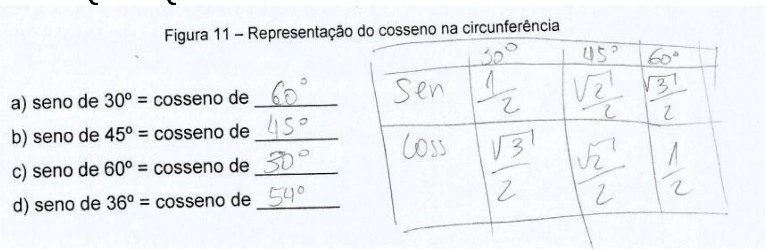


Figura 11 – Representação do cosseno na circunferência

a) seno de 30º = cosseno de 60°

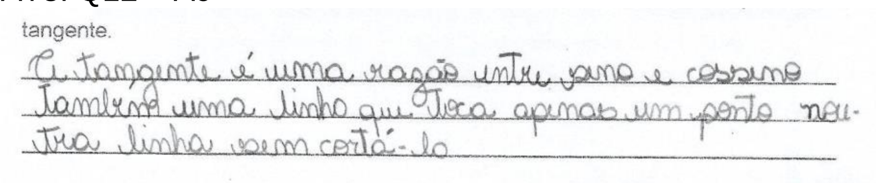
b) seno de 45º = cosseno de 45°

c) seno de 60º = cosseno de 30°

d) seno de 36º = cosseno de 54°

	30°	45°	60°
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coss	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

AT3: Q12 – A9

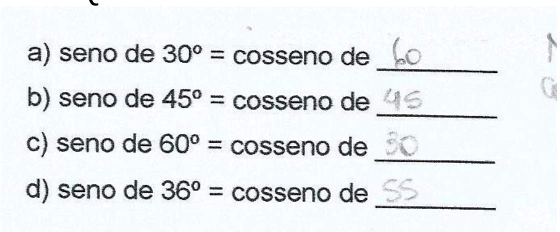

tangente.

A tangente é uma razão entre sino e cosseno Tambem uma linho que Toca apenas um ponto neu-tra linha sem cortá-lo

Síntese descritiva: as Questões foram resolvidas em concordância com as informações que os trechos históricos ofereciam, bem como estavam adequados os valores numéricos e expressões algébricas.

Resposta parcialmente adequada: de acordo com o trecho histórico apresentado na SD os alunos interpretaram e resolveram parcialmente a questão.

AT3: Q5 – A10

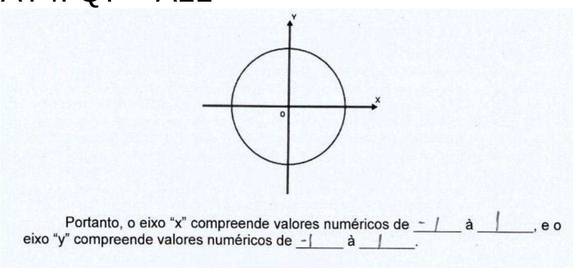

a) seno de 30º = cosseno de 60

b) seno de 45º = cosseno de 45

c) seno de 60º = cosseno de 30

d) seno de 36º = cosseno de 55

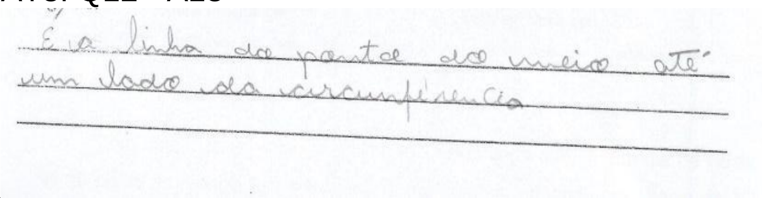
AT4: Q7 – A11



Portanto, o eixo “x” compreende valores numéricos de -1 à 1, e o eixo “y” compreende valores numéricos de -1 à 1.

Síntese descritiva: essas respostas foram consideradas parcialmente adequadas pelo fato dos alunos não a responderem por completo. Contudo, o que responderam estava adequado a questão, como fez o aluno A10 na AT3:Q5. Houve Questões que foram respondidas por completo, porém algum dado foi apresentado incorreto, como o aluno A11 na AT4: Q7.

Resposta inadequada: os alunos descreveram de forma incoerente com o que foi apresentado no trecho histórico referente, conforme questão 12 da AT3.

AT3: Q12 - A18
 É a linha do ponto do meio até um lado da circunferência
Síntese descritiva: Diante da pesquisa realizada no dicionário, o aluno interpretou de forma inadequada o que seria a tangente.

Fonte: Os autores (2018).

As Diretrizes Curriculares de Matemática afirmam que “a história da Matemática é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problemas, na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos” (PARANÁ, 2008 p. 66). Com base nesta afirmação, foram analisadas as questões referentes a esta subcategoria, para verificar se de fato a História contribuiu para uma melhor compreensão e construção do conhecimento trigonométrico.

A partir das questões analisadas foi possível observar que para a maioria dos alunos ocorreu a compreensão adequada do conhecimento trigonométrico baseado no desenvolvimento histórico desse assunto, de modo que os alunos descreveram e representaram adequadamente as terminologias do contexto em que estava inserida a questão.

Quanto aos alunos que responderam de forma parcialmente adequada, nas Q5 e Q6 da AT3, na Q7 da AT4 e nas Q1 e Q2 da AT5, isso ocorreu por representarem valores incorretos. Já nas Q1 e Q12 da AT3 os alunos representaram os segmentos, mas interpretaram de forma parcialmente adequada, contendo elementos inadequados. De qualquer forma, para todas essas questões, houve ainda as que não foram resolvidas por completo, também classificadas como parcialmente adequadas.

Para a unidade “resposta inadequada” apenas uma questão foi encontrada: a Q12 da AT3, na qual aproximadamente 37% dos alunos descreveram conceitos incoerentes aos apresentados pelo trecho histórico e pelo significado pesquisado no dicionário, caracterizando a falta de interpretação dos alunos sobre a informação dada.

Ainda assim, diante da análise realizada, pôde-se observar que a maioria dos alunos compreendeu o conhecimento trigonométrico construído por meio da História, o que implica em resultados satisfatórios a esta subcategoria.

No Quadro 30 é possível observar o número de respostas analisadas por unidade, confirmando que a maioria dos alunos respondeu de forma adequada.

Quadro 30 - Dados quantitativos das Unidades referentes a subcategoria II – Resolução da questão a partir da reconstrução histórico-epistemológica.

	Resposta adequada	Resposta parcialmente adequada	Resposta inadequada
AT2: Q1	19	0	0
AT3: Q1a	16	3	0
AT3: Q1b	19	0	0
AT3: Q1c	19	0	0
AT3: Q1d	19	0	0
AT3: Q2	19	0	0
AT3: Q3	19	0	0
AT3: Q5	18	1	0
AT3: Q6	18	1	0
AT3: Q9	19	0	0
AT3: Q12	7	5	7
AT4: Q7	12	7	0
AT5: Q1	14	5	0
AT5: Q2	17	2	0
TOTAL	**235**	**24**	**7**
%	**88%**	**9%**	**3%**

Fonte: Os autores (2018).

4.2.2.1.2 Subcategoria II – Refletindo sobre o uso da História

A partir desta subcategoria foram analisadas as questões em que os alunos deveriam descrever suas opiniões relativas ao estudo do conteúdo matemático junto com a História. Foram efetivadas as unidades: "favoreceu a compreensão" e "não soube responder".

As questões analisadas referentes a esta subcategoria foram: Q2 da AT1; RF3 da AT3; RF1 e RF3 da AT6. As análises realizadas sobre estas podem ser observadas no Quadro 31.

Quadro 31 - Categoria Abordagem Metodológica de Ensino Histórico-Epistemológica, subcategoria I – Compreensão do conhecimento trigonométrico, subcategoria II – Refletindo sobre o uso da História e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

Favoreceu a compreensão: os alunos descreveram características pelas quais o uso da História proporcionou a compreensão do conhecimento.
AT1: Q2 – A4 *“Porque nos ajuda a entender melhor, aprender bem e até deduzir as fórmulas e não decora-las”.* AT:3 RF 3 – A4 *“Sim, pois compreendemos a origem das razões trigonométricas, as quais não surgiram do nada”.* AT3: RF 3 – A6 *“Sim, comecei a entender o ‘porquê’ de muitas fórmulas e tabelas a partir de sua origem”.* AT3: RF 3 – A10 *“Sim, porque conheci coisas que eu não sabia”.* AT3: RF 3 – A11 *“Para compreender melhor a matemática”.* AT3: RF 3 – A12 *“Sim, porque aprendi vários conteúdos novos e ao mesmo tempo aprendi como surgiram, o seu local de origem e como eram usados”.* AT3: RF 3 – A14 *“Sim, a origem histórica é importante para entender a origem das coisas, para utilizarmos no dia a dia”.* AT3: RF 3 – A15 *“Sim, pois consegui entender melhor com a história”.* AT3: RF 3 – A16 *“Sim. Porque deixou mais fácil para compreender melhor a respeito do conteúdo”.* AT3: RF 3 – A17 *“Foi bom porque conheci coisas sobre a matemática que não fazia nem ideia”.* AT3: RF 3 – A18 *“Foi sim, pois, agora tenho conhecimento da onde eles vieram, e também o porque deles!!!”.* AT6: RF1 – A4 *“Sim, pois, a matemática é raciocínio e não decoreba”.* AT6: RF1 – A6 *“Sim, pois me ajudou a compreender a origem das fórmulas, maneira de fazer, e situações a qual eu posso aplica-la”.* AT6: RF1 – A10 *“Sim, o estudo do seno e o cosseno foi compreendido diferente dos Estudos batidos na escola”.* AT6: RF1 – A16 *“Conhece melhor as histórias por trás, afinal apenas sabia a fazer não sabia detalhadamente o porque era usada as fórmulas”.* AT6: RF3 – A15 “*Sim, pois com as históricas fica mais fácil para compreender, e são mais atrativa fugindo um pouco do conteúdo que só possui calculos”.* AT6: RF3 – A16 *“Sim, assim temos a ideia de onde veio, como foi criado, e para o que serve”.* AT6: RF3 – A19 *“Sim, pois descobrimos as origens de tudo e onde podemos aplicar”.*
Síntese descritiva: diante das descrições dos alunos podemos identificar critérios que foram considerados favoráveis à aprendizagem deles.

Não soube responder: alunos que não souberam descrever se a História favoreceria ou não sua aprendizagem.
A1: Q2 – A5 "*Eu não sei o que é a história da matemática".*
Síntese descritiva: Esta Unidade ocorreu somente na questão 2 da atividade 1, que tinha como objetivo identificar uma opinião prévia do aluno sobre o uso da História na compreensão dos conceitos matemáticos.

Fonte: Os autores (2018).

Ao analisar as reflexões dos alunos sobre o uso da História para a compreensão do conhecimento trigonométrico obtivemos respostas satisfatórias, pois nas atividades 3 e 6 todos os alunos responderam de forma favorável. Ressaltamos que a questão 2 da atividade 1 era para identificar uma opinião prévia dos alunos, na qual constatou-se que aproximadamente 58% não tinha conhecimento sobre a História da Matemática, o que permite concluir que para esses alunos os conteúdos matemáticos sempre foram ensinados de forma completamente dissociada de seus desenvolvimentos históricos. A partir dessa SD eles estudaram a Trigonometria integrada à sua História e, todos os alunos consideraram que esta metodologia foi favorável para compreender o conteúdo proposto.

Dentre as reflexões dos alunos destacamos que eles consideraram favorável o uso da História ao poder relacionar a Matemática com situações do dia a dia, além de compreender sua origem e o porquê das fórmulas matemáticas, considerações estas que vão de encontro às Diretrizes Curriculares da Matemática que dizem:

> A história deve ser um fio condutor que direciona as explicações dadas aos porquês da Matemática. Assim, pode promover uma aprendizagem significativa, pois proporciona ao estudante entender que o conhecimento matemático é construído historicamente a partir de situações concretas e necessidades reais (PARANÁ, 2008, p. 66 apud MIGUEL, MIOROM, 2004).

No Quadro 32 é possível notar que inicialmente (AT1 Q2) a maioria dos alunos não soube responder a questão, porém nas demais atividades é possível verificar que 100% dos alunos consideraram esta metodologia favorável a compreensão.

Quadro 32 - Dados quantitativos das unidades referentes à subcategoria II – Refletindo sobre o uso da História.

	Favoreceu a compreensão	Não soube responder
AT1: Q2	8	11
AT3: RF3	19	0
AT6: RF1	19	0
AT6: RF3	19	0
TOTAL	**84**	**11**
%	**88%**	**12%**

Fonte: Os autores (2018).

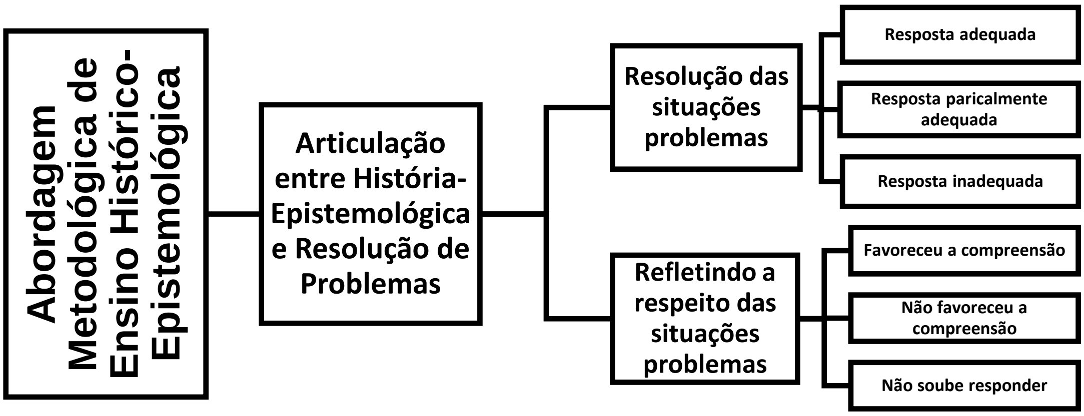
Estes resultados são excelentes, visto que a SD foi construída com base na Abordagem Histórico-Epistemológica e os alunos demonstraram uma aprendizagem efetiva do conhecimento trigonométrico a partir dessa abordagem.

4.2.2.2 Subcategoria I – Articulação entre História-Epistemológica e Resolução de Problemas

Durante a análise da subcategoria "Articulação entre História-Epistemológica e Resolução de Problemas" surgiu à necessidade de elencar as subcategorias: "Resolução das situações problemas" e "Refletindo sobre as situações problemas". Estas subcategorias emergiram da necessidade em analisar as questões que os alunos resolviam segundo conceitos adquiridos por meio do estudo da história e questões em que descreviam se a metodologia utilizada contribuiu para a compreensão e aplicação do conteúdo matemático em situações do dia a dia, de acordo com o objetivo proposto pela SD de proporcionar aos alunos uma aprendizagem significativa sobre o conteúdo. Ressaltamos que esta análise não se baseia em determinados passos que a abordagem Resolução de Problemas possui, pois não é este o foco da pesquisa, esta abordagem foi utilizada apenas para situações que demonstrem a aplicabilidade do conteúdo.

Na Figura 48, apresentamos como foi analisada esta subcategoria com suas subcategorias e as unidades de análise.

Figura 48 - Categoria Abordagem Metodológica de Ensino Histórico-Epistemológica, subcategoria I – Articulação entre História-Epistemológica e Resolução de Problemas, subcategoria II – Resolução das situações problemas; Refletindo sobre as situações problemas e unidades prévias.

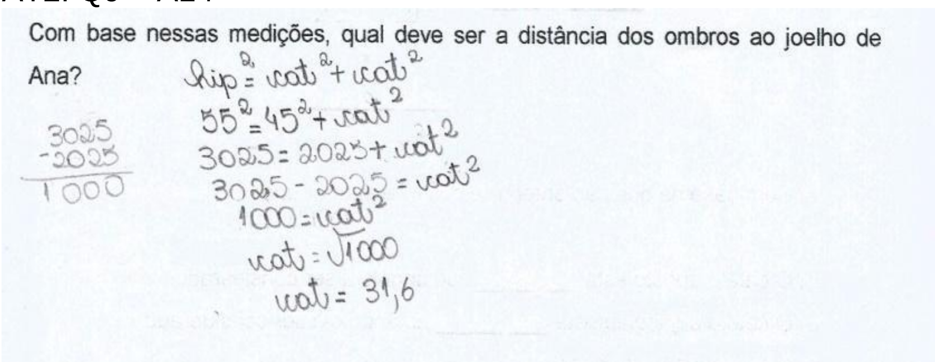


Fonte: Os autores (2018).

4.2.2.2.1 Subcategoria II– Resolução das situações problemas

Por esta subcategoria foram analisadas as questões Q9 da AT2, Q4, Q8, Q13 da AT3 e Q3 da AT6. Estas questões, que envolvem situações problemas do dia a dia, foram elaboradas para os alunos resolverem utilizando os conceitos adquiridos por meio do estudo da História. Para analisá-las, foram definidas as seguintes unidades: “resposta adequada”, “resposta parcialmente adequada” e “resposta inadequada”, porém a unidade “resposta inadequada” não foi efetivada, como mostra o Quadro 33.

Quadro 33 - Categoria Abordagem Metodológica de Ensino Histórico-Epistemológica, subcategoria I – Articulação entre História-Epistemológica e Resolução de Problemas, subcategoria II – Resolução das situações problemas e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

Resposta adequada: os alunos se apropriaram dos conceitos necessários, das fórmulas para resolverem os problemas e terminologias adequadas para identificar alterações em representações gráficas.
AT2: Q9 – A14
 Com base nessas medições, qual deve ser a distância dos ombros ao joelho de Ana? $hip^2 = cat^2 + cat^2$ $55^2 = 45^2 + cat^2$ $3025 = 2025 + cat^2$ $3025 - 2025 = cat^2$ $1000 = cat^2$ $cat = \sqrt{1000}$ $cat = 31{,}6$ $3025 - 2025 = 1000$

AT3: Q4 – A6

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{109{,}50}{x}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{109{,}50}{x}$$

$$\frac{1{,}41}{2} = \frac{109{,}50}{x}$$

$$1{,}41x = 219$$

$$x = \frac{219}{1{,}41}$$

$$\boxed{x = 155{,}31 \text{ m}}$$

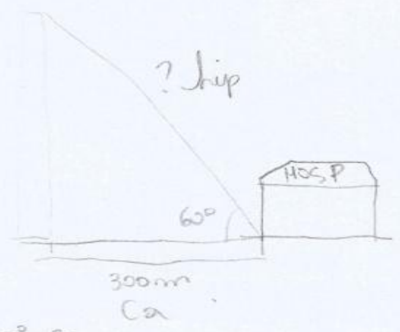
AT6: Q3d – A13

D	Deslocando o eixo X	Alterou o inicio e o fim da onda sonora

Síntese descritiva: diante dos conhecimentos adquiridos por meio da História, os alunos resolveram as Questões de forma adequada, fazendo uso das fórmulas adequadas a cada situação, desenvolvendo o cálculo de forma correta e fazendo uso das terminologias adequadas para identificar as alterações que ocorreram nas funções.

Resposta parcialmente adequada: os alunos não concluíram a resolução das questões ou apesar de identificarem que ocorreu alterações nas representações gráficas das funções, não utilizaram terminologias que especificassem quais foram as alterações.

AT3: Q8 – A10



$$\cos 60^\circ = \frac{Ca}{hip}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{300}{X}$$

$$X =$$

AT6: Q3a, b, c – A8

Coeficientes	Ocorreu	Componente da onda
A	alterou o eixo y	alterou a crista e o vale
B	alterou o eixo y	alterou a amplitude
C	alterou o eixo X	aumentou a frequência

Síntese descritiva: o processo de resolução está correto, porém o resultado não foi apresentado em questões de situações problemas. Em questões para

interpretar o que ocorreu com as representações gráficas, os termos utilizados para descrever as alterações ocorridas foram consideradas parcialmente adequadas, pois não foram usados termos que especificasse se a função ampliou, deslocou ou comprimiu, mas sim que apenas alterou.

Fonte: Os autores (2018).

As questões analisadas por esta subcategoria apresentaram respostas adequadas e parcialmente adequadas. Para as questões que envolviam situações problemas os alunos usaram adequadamente as fórmulas para realizar o cálculo, contudo não foram todos os alunos que realizaram corretamente os cálculos, consequentemente, não obtiveram o resultado esperado.

Na questão 3 (a, b, c) da atividade 6, ao serem modificados os valores dos coeficientes, os alunos deveriam interpretar as alterações ocorridas nas representações gráficas. Neste sentido, todos os alunos, ou seja, 100% deles apresentaram “resposta parcialmente adequada”, onde a maioria apenas identificou que ocorreu alteração, não especificando de qual alteração se trata. Diferentemente, na questão Q3d, 63% dos alunos identificaram quais foram as alterações que ocorreram, utilizando de termos adequados para descrevê-las. Assim, podemos observar que para questões com fórmulas e cálculos a unidade “resposta adequada” ocorreu com mais frequência. Por outro lado, nas questões cujo objetivo era interpretar as representações gráficas, a unidade “resposta parcialmente adequada” ocorreu com mais frequência.

Entretanto, concluímos que os alunos compreenderam os conceitos necessários para aplicá-los em situações problemas do dia a dia. Isso pode ter sido viabilizado pela articulação ocorrida entre as metodologias de ensino Histórico-Epistemológica e Resolução de Problemas, conforme orientações das Diretrizes Curriculares de Matemática (PARANÁ, 2008). Neste sentido, Dante (2003) destaca que ao utilizar da resolução de problemas nos conhecimentos Matemáticos o aluno tem oportunidade de compreender de que forma aplicar este conhecimento a fim de resolver questões, como proposto e realizado pela SD.

No Quadro 34 podemos mensurar as respostas dos alunos por unidades. Note que os alunos corresponderam de forma satisfatória a esta subcategoria, pois todas as respostas apresentadas são aceitáveis.

Quadro 34 - Dados quantitativos das Unidades referentes à subcategoria II – Resolução das situações problemas.

	Resposta adequada	Resposta parcialmente adequada
AT2: Q9	13	6
AT3: Q4	18	1
AT3: Q8	18	1
AT3: Q13	15	4
AT6: Q3a	0	19
AT6: Q3b	0	19
AT6: Q3c	0	19
AT6: Q3d	12	7
TOTAL	**76**	**76**

Fonte: Os autores (2018).

4.2.2.2.2 Subcategoria II – Refletindo sobre as situações problemas

Nesta subcategoria foram analisadas questões do tópico "Refletindo" da SD, em específico na atividade 6 (RF2). Os alunos deveriam descrever, com base em uma reflexão, se as situações problemas resolvidas de acordo como uma construção do conhecimento histórico-epistemológica sobre a Trigonometria contribuiu para a compreensão do conteúdo e aplicação em situações do dia a dia. Para isto, foram elencadas unidades prévias para analisar as respostas dos alunos, sendo elas: "favorável à compreensão", "não favorável à compreensão" e "não souber responder". A única unidade que ocorreu foi "favorável a compreensão", as demais não foram efetivadas. A análise realizada pode ser observada no Quadro 35.

Quadro 35 - Categoria Abordagem Metodológica de Ensino Histórico-Epistemológica, subcategoria I – Articulação entre História-Epistemológica e Resolução de Problemas, subcategoria II – Refletindo sobre as situações problemas e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

Favoreceu a compreensão: os alunos compreenderam o conteúdo de forma que a identificaram em situações do dia a dia, assim como foi historicamente.
AT6: RF2 – A4 *"Sim, na música, medições de frequências sonoras, etc.".* AT6: RF2 – A6 *"Sim, na música, nos estúdios, nas companhias elétricas, nas oficinas mecânicas, etc.".* AT6: RF2 – A18 "Sim, diversas coisas no nosso cotidiano e até não sabia! Mais agora eu sei".

AT6: RF2 – A19 *“Sim, até na nossa fala tem como estudar as funções trigonométricas, até mesmo para medi a altura de algo”.*
Síntese descritiva: todos os alunos consideraram que o conteúdo Funções Trigonométricas são aplicáveis em situações do dia a dia. Além disso, apresentaram exemplos, como demonstrado nos excertos, a partir dos quais podemos considerar uma aprendizagem significativa.

Fonte: Os autores (2018).

A partir da análise sobre as reflexões observa-se que alguns alunos apresentaram respostas mais sucintas em comparação com outros mais expressivos. Contudo, 100% dos alunos concordaram que as Funções Trigonométricas são aplicáveis em situações do dia a dia, sendo este um resultado muito importante para nossa pesquisa, visto que o objetivo era proporcionar uma aprendizagem significativa dos conteúdos por meio de aplicações no nosso dia a dia.

Destacamos nesta subcategoria o aluno A7 e sua reflexão. Quando questionado se as Funções Trigonométricas são aplicáveis em situações do dia a dia disse “*sim*”, porém destacou que “*não serão úteis para mim*”. Ele considerou que são aplicáveis, mas talvez por não gostar da situação problema trabalhada (as ondas sonoras e batimentos cardíacos) ou por outros motivos, não reconheceu este conteúdo como sendo útil para si. Esta resposta é considerável para esta pesquisa e nos leva a refletir sobre a necessidade de diversificar os exemplos envolvendo as situações problemas, porém, os demais alunos indicaram positivamente a utilização dos contextos em suas vidas, fato que nos leva a considerar satisfatórias as atividades propostas na SD.

4.2.2.3 Subcategoria – Articulação entre história-epistemológica e recursos tecnológicos

Na SD foi utilizado, em articulação com a abordagem História-Epistemológica o uso de Recursos Tecnológicos. Essa articulação é inclusive bastante incentivada pela Web: o uso do software GeoGebra para o estudo das funções trigonométricas.

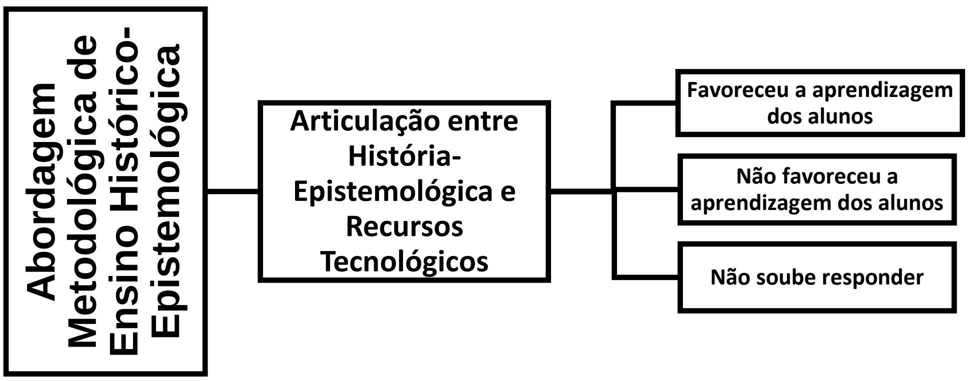
A respeito dos recursos tecnológicos utilizando as notícias públicas via Web, na AT2, por exemplo, foi destacada logo de início uma notícia sobre materiais antigos utilizados para estudos trigonométricos e na AT6 outra notícia sobre uma novidade tecnológica (as tatuagens sonoras) que envolvem conceitos de Funções Trigonométricas. Estas notícias serviram para promover discussões com os alunos sobre acontecimentos que envolviam o conteúdo estudado. Entretanto, não serão analisadas tendo em vista que as falas dos alunos não foram gravadas.

O recurso tecnológico, software GeoGebra, foi utilizado várias vezes na SD, o que possibilitou e facilitou o estudo das Funções Trigonométricas pelo fato de construir as funções no ciclo trigonométrico e no gráfico, proporcionando uma visão mais precisa das funções, bem como viabiliza a modificação dos elementos das funções.

As questões AT5: Q1, Q2; AT6: Q1(a, b, c, d, e, f), Q2(a, b), Q3(a, b, c, d) envolveram o uso do GeoGebra. Analisamos se o recurso tecnológico favoreceu ou não a aprendizagem dos alunos. Esses critérios foram definidos como unidades para analisar os dados dos alunos, como mostra a Figura 49. Neste sentido, as respostas adequadas e parcialmente adequadas foram consideradas "favoráveis a aprendizagem", visto que o software contribuiu para o desenvolvimento das questões de forma coerente.

Para a unidade "não favoreceu a aprendizagem" foram consideradas as respostas dos alunos estavam em contradição ao que era pedido, ou seja, o software mostrou algo e aluno deu representou/descreveu outra resposta. Para as questões não respondidas foi definida a unidade "não soube responder", conforme Figura 49.

Figura 49 - Categoria Abordagem Metodológica de Ensino Histórico-Epistemológica, subcategoria Articulação entre história-epistemológica e recursos tecnológicos e unidades prévias.



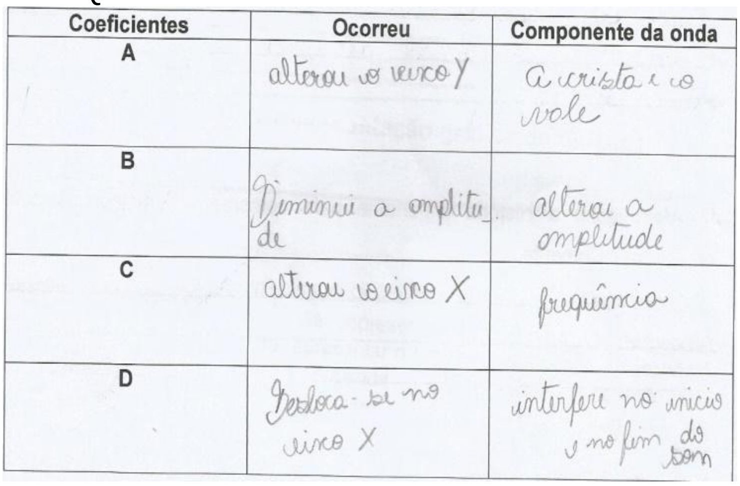
Fonte: Os autores (2018).

A partir das análises efetuadas, as quais poderão ser observadas no Quadro 36, foram efetivas as unidades “favoreceu a aprendizagem” e “não favoreceu a aprendizagem”.

Quadro 36 - Categoria Abordagem Metodológica de Ensino Histórico-Epistemológica, subcategoria Articulação entre história-epistemológica e recursos tecnológicos e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

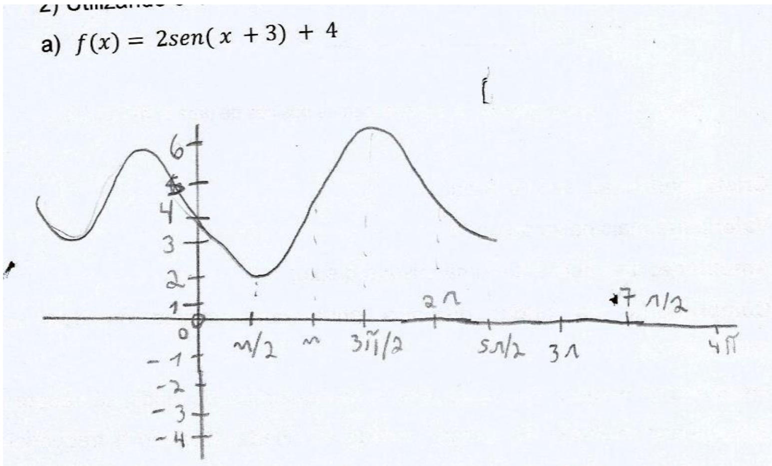
Favoreceu a aprendizagem: os alunos realizaram de forma adequada e/ou parcialmente adequada Questões para identificar alterações, valores e fazer esboço das funções trigonométricas.

AT6: Q3 – A19



Coeficientes	Ocorreu	Componente da onda
A	alterou o eixo Y	a crista e o vale
B	Diminui a amplitude	alterou a amplitude
C	alterou o eixo X	frequência
D	desloca-se no eixo X	interfere no início e no fim do som

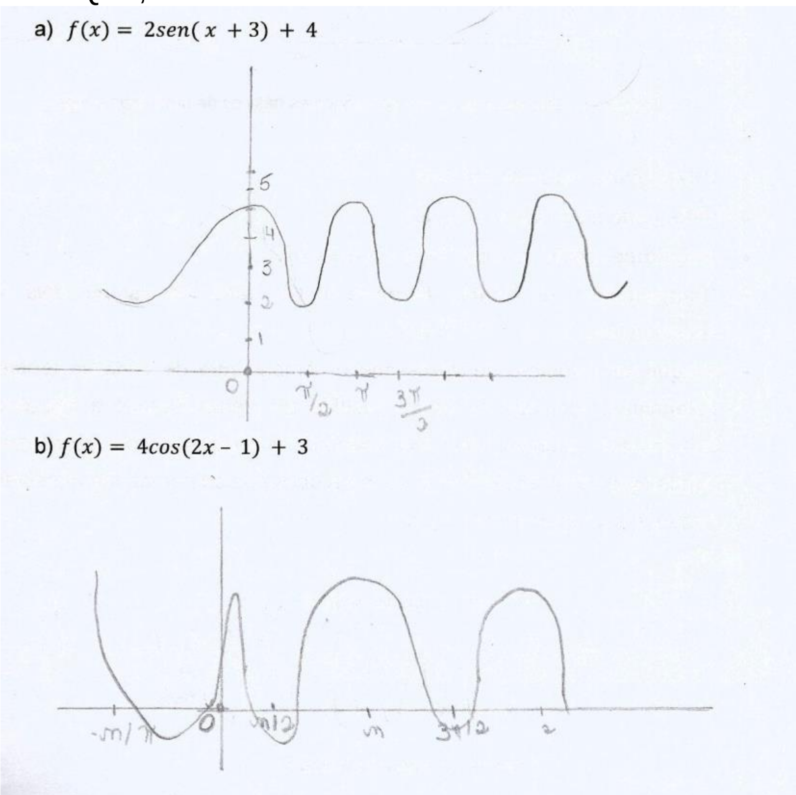
AT6: 2a – A12



Síntese descritiva: foi considerada favorável a aprendizagem dos alunos quando identificaram as alterações e os valores que o software demonstrou para as Funções Trigonométricas. Além disso, também foram consideradas as respostas nas quais os alunos identificaram algumas alterações ou alguns valores das funções, mesmo não identificando precisamente qual a alteração que ocorreu. Quando o aluno identificou que ocorreu alteração na função, foi considerado como resposta favorável ao uso do GeoGebra para a aprendizagem dos alunos.

Não favoreceu a aprendizagem: não foi realizado o esboço das funções de forma adequada.

AT6: Q2a, b – A9



Síntese descritiva: na Q2 da AT6 os alunos tinham que esboçar as Funções Trigonométricas de acordo com a demonstração do software, a maioria dos alunos foi classificada nesta Unidade, visto que esboçaram sem traçar o comportamento das funções pelos pontos que interceptam os eixos “x” e “y”.

Fonte: Os autores (2018).

As questões analisadas por esta subcategoria são referentes às representações dos valores das funções seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico e suas devidas localizações nos eixos x e y (AT5: Q1, Q2). Também foram consideradas questões em que os alunos teriam que descrever o que ocorreu com as Funções Trigonométricas ao serem modificados os coeficientes (AT6: Q1a, b, c, d, e, f; Q3a, b, c, d), além de questões nas quais os alunos deveriam esboçar a representação gráfica das funções (AT6: Q2a, b). A seguir especificaremos o porquê foram classificadas em “favorável a aprendizagem” e “não favorável a aprendizagem” dos alunos.

Com relação às questões que envolveram representações dos valores das funções seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico e suas devidas localizações nos eixos x e y e, questões em que os alunos teriam que descrever o que ocorreu com as Funções Trigonométricas ao serem modificadas, indícios nos levam a concluir que o uso do software favoreceu a aprendizagem, pois não houve respostas inadequadas para estas questões.

Todos os alunos realizaram as questões propostas de forma satisfatória, mesmo com alguns alunos trocando os nomes dos eixos do plano cartesiano, não especificando o que alterou com a modificação nas funções e/ou não descrevendo todas as modificações que ocorreram nas funções, tais ocorrências não caracterizaram suas respostas inadequadas, mas sim parcialmente adequada. Contudo, foi possível observar que todos compreenderam e realizaram o que a questão pedia de forma coerente, portanto consideramos que o uso do GeoGebra foi favorável à aprendizagem.

Com relação às questões em que os alunos deveriam esboçar a representação gráfica das funções a partir das representações do software, pudemos observar que as respostas se dividiram entre as unidades, pois alguns alunos esboçaram adequadamente identificando o comportamento da função e os pontos que tocam nos eixos x e y e, outros alunos, esboçaram o comportamento da função (ondas), mas não representaram por quais pontos a função interceptaria os eixos, deixando a função "solta" no plano cartesiano. Portanto, inferimos que este fato ocorreu pela dificuldade dos alunos em representar as funções graficamente no papel, evento que é viabilizado com o uso do GeoGebra.

Diante da análise apresentada é notável que o uso de recursos tecnológicos para o ensino das Funções Trigonométricas foi favorável à aprendizagem das representações gráficas pelos alunos. Em concordância ao uso de software para representações gráficas, as Diretrizes Curriculares de Matemática afirmam:

> Atividades com lápis e papel ou mesmo quadro e giz, para construir gráficos, por exemplo, se forem feitas com o uso dos computadores, permitem ao estudante ampliar suas possiblidades de observação e investigação, porque algumas etapas formais do processo construtivo são sintetizadas (PARANÁ, 2008, p. 65 apud D'AMBROSIO, BARROS, 1988).

Portanto, a análise nos permitiu identificar que o uso do software possibilitou aos alunos uma observação ampliada da representação gráfica dos componentes da função, fato corroborado pelas Diretrizes Curriculares de Matemática, segunda a qual o uso de software favorece a experimentação e potencializa as formas de resolução (PARANÁ, 2008). Considerando então, o uso de software nas aulas de Matemática, em especifico nas aulas de Funções Trigonometria, um recurso que favorece e contribui muito para a aprendizagem dos alunos, como foi demonstrado pelos resultados da análise.

O Quadro 37 mostra a quantidade de aluno em cada Unidade, a partir do qual podemos observar mais uma vez que o uso de recursos tecnológicos para o ensino das Funções Trigonométricas foi favorável a aprendizagem dos alunos.

Quadro 37 – Dados quantitativos das Unidades referentes à subcategoria Articulação entre história-epistemológica e recursos tecnológicos.

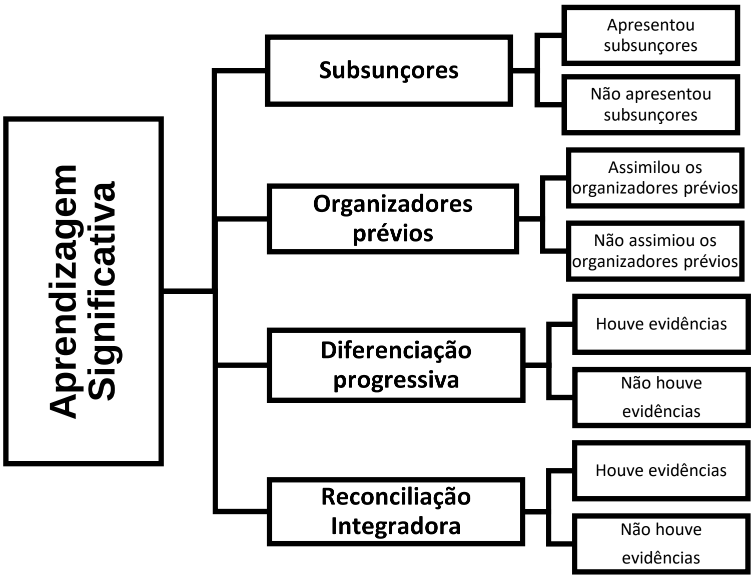
	Favoreceu a aprendizagem	**Não favoreceu a aprendizagem**
AT5: Q1	19	0
AT5: Q2	19	0
AT6: Q1a	19	0
AT6: Q1b	19	0
AT6: Q1c	19	0
AT6: Q1d	19	0
AT6: Q1e	19	0
AT6: Q1f	19	0
AT6: Q2a	5	14
AT6: Q2b	9	10
AT6: Q3a	19	0
AT6: Q3b	19	0
AT6: Q3c	19	0
AT6: Q3d	19	0
TOTAL	**242**	**24**
%	**91%**	**9%**

Fonte: Os autores (2018).

4.2.3 Categoria – Aprendizagem Significativa

A categoria “Aprendizagem Significativa” analisou na SD, de acordo com a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, a aprendizagem dos alunos por meio de quatro subcategorias e suas respectivas unidades prévias, apresentadas na Figura 50.

Figura 50 - Categoria sobre a Aprendizagem Significativa, com suas respectivas subcategorias e unidades.



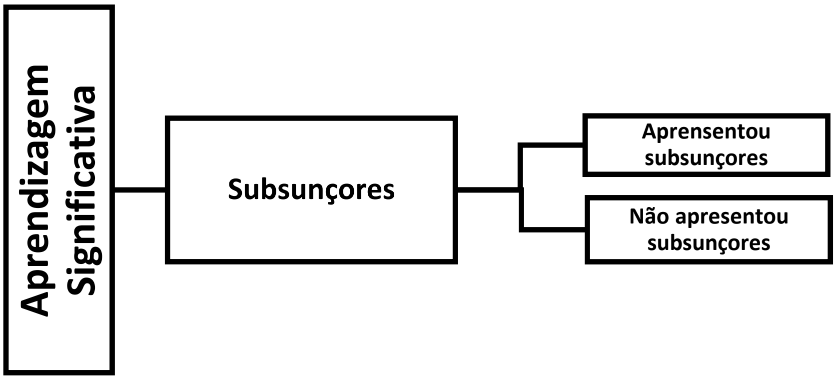
Fonte: Os autores (2018).

No texto a seguir é apresentada a análise, bem como os excertos de cada unidade.

4.2.3.1 Subcategoria – Subsunçores

Nesta subcategoria foram analisadas a atividade 1 questões 1, 3, 4, 5 e 6 da SD de acordo com as unidades apresentadas na Figura 51. Essa atividade foi elaborada a fim de identificar os conhecimentos prévios dos alunos, ou seja, os Subsunçores referentes à Trigonometria. É importante ressaltar que os Subsunçores atuam como “âncora” para os conhecimentos novos a serem adquiridos, aspecto fundamental para que ocorra a aprendizagem significativa dos alunos (AUSUBEL, 2003).

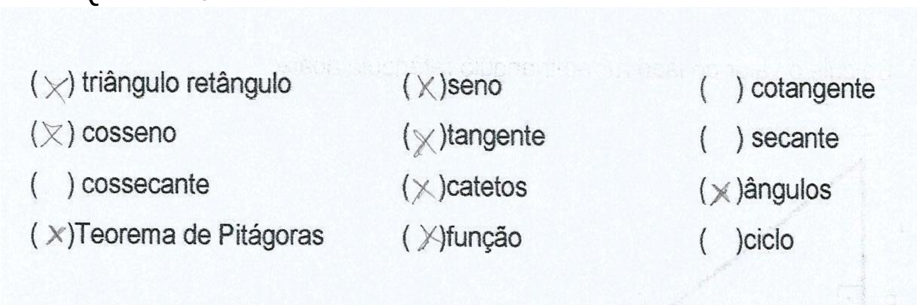
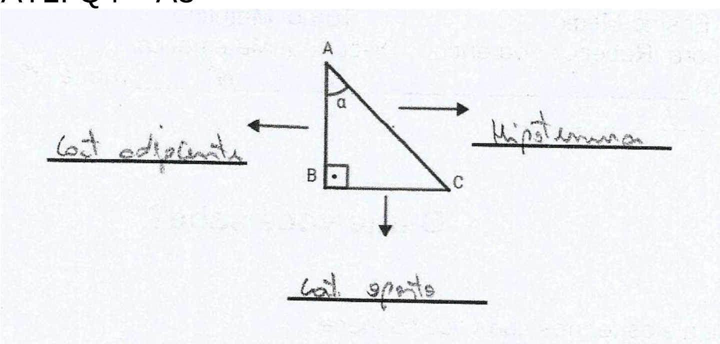
Figura 51 - Categoria Aprendizagem Significativa, subcategoria Subsunçores e unidades prévias.



Fonte: Os autores (2018).

De acordo com as análises realizadas, as duas unidades prévias foram efetivas, como pode ser observado no Quadro 38.

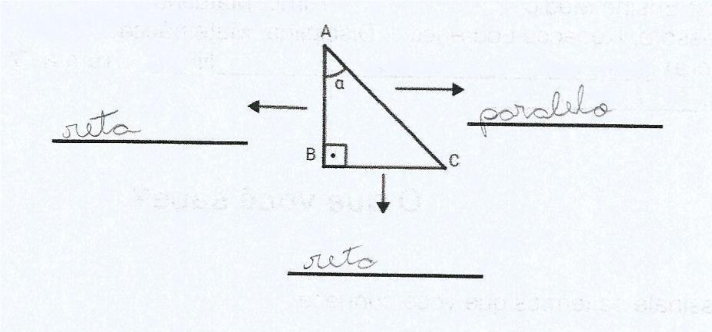
Quadro 38 - Categoria Aprendizagem Significativa, subcategoria Subsunçores e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

Apresentou subsunçores: os alunos apresentaram respostas adequadas a questão.
AT1: Q1 – A16  (x) triângulo retângulo (x)seno (   ) cotangente (x) cosseno (x)tangente (   ) secante (   ) cossecante (x)catetos (x)ângulos (x)Teorema de Pitágoras (x)função (   )ciclo AT1: Q4 – A3 
Síntese descritiva: verificou-se que os alunos souberam identificar nominalmente alguns conteúdos e/ou resolveram as questões de forma adequada, podendo ser adequadas completamente ou parcialmente, contudo considerou-se que o aluno possuía algum conhecimento para resolver a

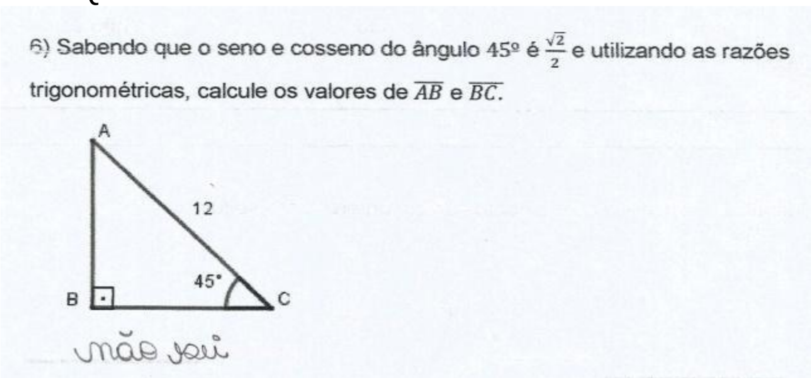
questão.

Não apresentou subsunçores: os alunos não apresentaram respostas adequadas e/ou não souberam responder.

AT1: Q4 – A7



AT1: Q5 – A9



Síntese descritiva: foram apresentadas respostas incorretas nas questões, com conceitos inadequados e/ou descreveram que não sabiam como resolver a questão ou não lembravam da fórmula, assim é possível inferir que esses alunos não tinham conhecimentos prévios necessários para resolver as questões.

Fonte: Os autores (2018).

De acordo com Moreira (2012, p.7):

> O conhecimento prévio é, na visão de Ausubel, a variável isolada mais importante para a aprendizagem significativa de novos conhecimentos. Isto é, se fosse possível isolar uma única variável como sendo a que mais influencia novas aprendizagens, esta variável seria o conhecimento prévio, os subsunçores já existentes na estrutura cognitiva do sujeito que aprende.

As questões da atividade 1 foram elaboras e analisadas a fim de verificar se os alunos possuíam conhecimentos prévios de alguns conceitos importantes para a aprendizagem dos novos conceitos trigonométricos, como o triângulo retângulo, circunferência e razões trigonométricas, sendo estes fundamentais para o estudo das Funções Trigonométricas.

Ao analisar estas questões foi identificado que, em geral, 60% dos alunos não possuíam conhecimentos prévios suficientes sobre o conteúdo de Trigonometria para resolver as questões propostas na SD, embora o conteúdo trabalhado na atividade 1 abordasse assuntos já estudados no Ensino Fundamental II pelos alunos de acordo com as Diretrizes Curriculares de Matemática (PARANÁ, 2008).

Na Q1 100% dos alunos apresentaram subsunçores, na qual deveriam identificar termos que já conheciam relacionados à Trigonometria. Os mais assinalados foram: triângulo retângulo, cosseno, seno tangente, Teorema de Pitágoras, função, ângulo e função.

Com relação às demais questões que se tratavam de resoluções, fórmulas e termos trigonométricos 75% dos alunos não apresentaram subsunçores suficientes. É possível inferir que o motivo para ocorrência deste resultado seja o fato de que os alunos não se recordaram de determinados conteúdos que possivelmente já foram estudados. Este fato pode se justificar devido ao tempo letivo que se tem para que os alunos aprendam os conteúdos previstos pelas Diretrizes Curriculares de Matemática, sendo estes incoerentes, pois muitas vezes o tempo letivo é insuficiente. Isto corroba com os argumentos de Teixeira (2017, p.111), que diz: “compreendemos que obstáculos também são importantes para fortalecer e sustentar a aprendizagem. Trata-se de um fato real e comum em um currículo que não concilia o tempo à quantidade de conteúdos designados a cada série”.

O Quadro 39 demonstra dados quantitativos para esta subcategoria, enfatizando a falta de subsunçores necessários para o estudo das Funções Trigonométricas.

Quadro 39 – Dados quantitativos das unidades referentes à subcategoria Subsunçores.

	Apresentou subsunçores	**Não apresentou subsunçores**
AT1: Q1	19	0
AT1: Q3	2	17
AT1: Q4	13	6
AT1: Q5	3	16
AT1: Q6	1	18
TOTAL	**38**	**57**
%	**40%**	**60%**

Fonte: Os autores (2018).

Contudo, ressalvamos que nas questões em que foram retomados esses conteúdos, podemos observar que os alunos mostraram melhoras, como mostra a subcategoria “Organizadores prévios” a seguir.

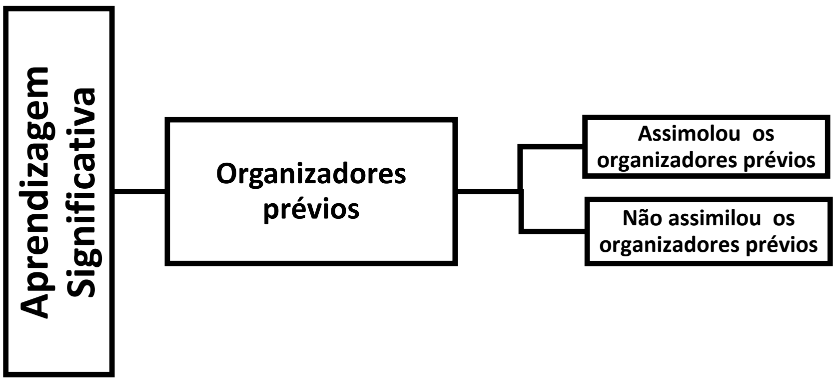
4.2.3.2 Subcategoria – Organizadores prévios

Quando a SD foi construída, ao elaborar as atividades seguintes da atividade 1, foi previsto que os alunos poderiam não apresentar conhecimentos prévios suficientes, assim as atividades 2, 3 e 4 foram elaboradas no sentido de proporcionar a apropriação desses conceitos prévios aos alunos, pois esses conceitos eram essenciais não só para o desenvolvimento das atividades futuras da SD, como para que os alunos pudessem compreender todo caminho percorrido no estudo das Funções Trigonométricas de forma significativa.

De acordo com a Aprendizagem Significativa, as questões presentes nestas atividades atuam como organizadores prévios, pois quando não se tem subsunçores adequados é necessário forma-los (MOREIRA, 2011). Portanto, nesta subcategoria foi analisada a assimilação com relação aos organizadores prévios, ou seja, se os alunos assimilaram ou não durante a aplicação da SD.

Para a análise, foram definidas as unidades “assimilou os organizadores prévios” e “não assimilou os organizadores prévios”, como mostra a Figura 52.

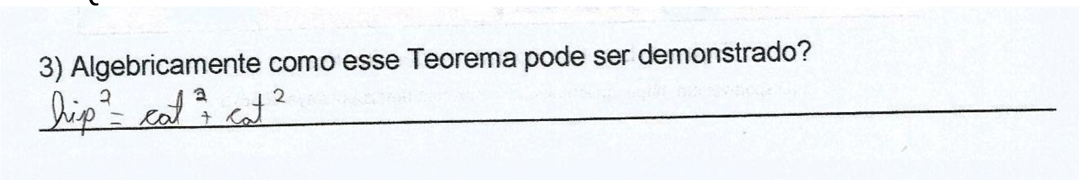
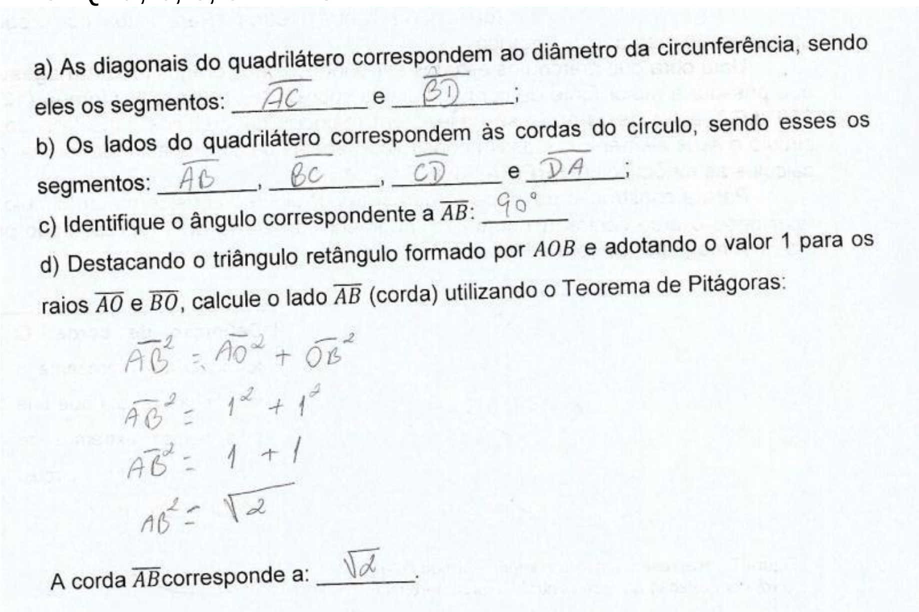
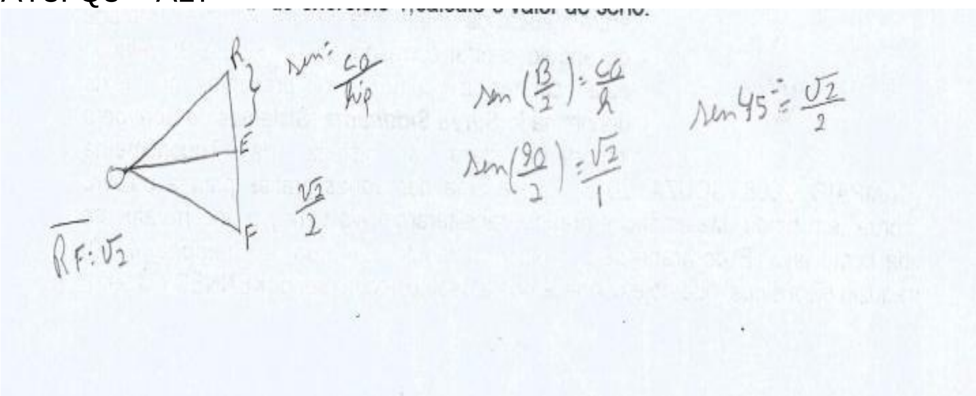
Figura 52 - Categoria Aprendizagem Significativa, subcategoria Organizadores prévios e unidades prévias.

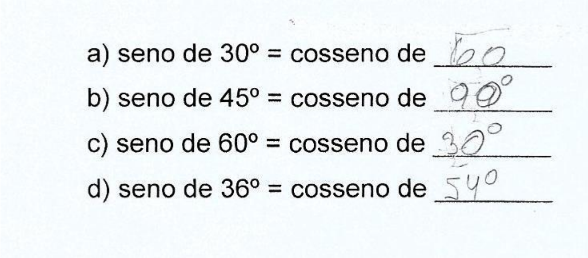


Fonte: Os autores (2018).

De acordo com as análises realizadas, as duas unidades prévias foram efetivas, como pode ser observado no Quadro 40.

Quadro 40 - Categoria Aprendizagem Significativa, subcategoria Organizadores prévios e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

Assimilou os organizadores prévios: os alunos apresentaram respostas adequadas as questões.
AT2: Q6 – A5  3) Algebricamente como esse Teorema pode ser demonstrado? $hip^2 = cat^2 + cat^2$ AT3: Q1a, b, c, d – A13  a) As diagonais do quadrilátero correspondem ao diâmetro da circunferência, sendo eles os segmentos: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$; b) Os lados do quadrilátero correspondem às cordas do círculo, sendo esses os segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$; c) Identifique o ângulo correspondente a $\overline{AB}$: 90° d) Destacando o triângulo retângulo formado por AOB e adotando o valor 1 para os raios $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, calcule o lado $\overline{AB}$ (corda) utilizando o Teorema de Pitágoras: $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$ $\overline{AB}^2 = 1^2 + 1^2$ $\overline{AB}^2 = 1 + 1$ $AB^2 = \sqrt{2}$ A corda $\overline{AB}$ corresponde a: $\sqrt{2}$. AT3: Q3 – A17  AT3: Q5 – A15



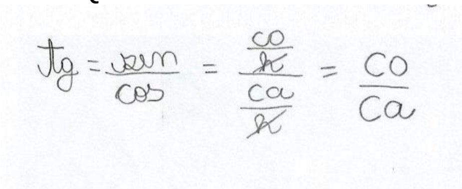
a) seno de 30º = cosseno de 60

b) seno de 45º = cosseno de 90º

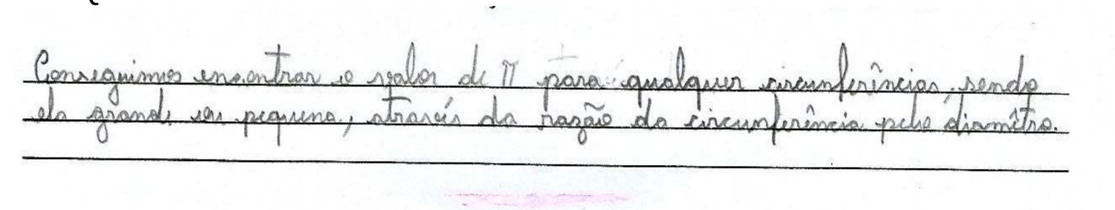
c) seno de 60º = cosseno de 30º

d) seno de 36º = cosseno de 54º

AT3: Q10 – A19



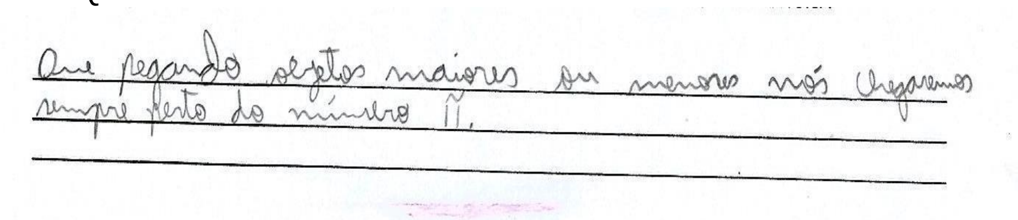
AT4: Q4 – A6



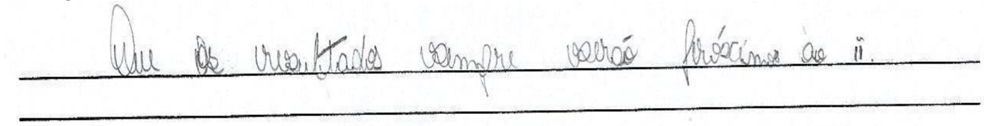
Síntese descritiva: os alunos responderam adequadamente as questões, com termos e valores corretos, assim é possível inferir que os alunos apresentaram organizadores prévios.

Não assimilou os organizadores prévios: os alunos não apresentaram respostas adequadas às questões.

AT4: Q4 – A12



AT4: Q4 – A16



Síntese descritiva: os alunos utilizaram termos e conceitos inadequados demonstrando desse modo que não se apropriaram dos organizadores prévios.

Fonte: Os autores (2018).

As questões analisadas pela AT2 foram Q4, Q5 e Q6, as quais atuaram como subsunçores para o Teorema de Pitágoras. Na AT3 Q1 os alunos identificaram os elementos de uma circunferência construindo subsunçores para o conceito da razão seno; já na Q5, o conceito seno, agora é considerado um subsunçor, deu suporte para construir o subsunçor da razão cosseno; e, nas questões Q9 e Q11, ao lerem informações históricas e pesquisaram no dicionário os alunos desenvolveram subsunçores relativos à tangente.

Na atividade seguinte, AT4 Q4 os alunos, de posse dos subsunçores já aprendidos, tiveram contato com os elementos da circunferência e sobre o π, conceito necessário para compreender posteriormente a unidade radianos.

Essas questões foram elaboradas como a Teoria da Aprendizagem Significativa orienta, ou seja, por meio de leituras, compreensão dos enunciados das questões, perguntas, demonstração, entre outros, como cita Moreira (2012, p.11):

> Organizador prévio é um recurso instrucional apresentado em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade em relação ao material de aprendizagem. Não é uma visão geral, um sumário ou um resumo que geralmente estão no mesmo nível de abstração do material a ser aprendido. Pode ser um enunciado, uma pergunta, uma situação-problema, uma demonstração, um filme, uma leitura introdutória, uma simulação. Pode ser também uma aula que precede um conjunto de outras aulas. As possibilidades são muitas, mas a condição é que preceda a apresentação do material de aprendizagem e que seja mais abrangente, mais geral e inclusivo do que este.

Diante dos dados analisados, verificou-se que 97% dos alunos assimilaram os organizadores prévios, ou seja, responderam de forma adequada ao que era pedido nas questões. Nas Q4 e Q6 da AT2, Q1, Q5 da AT3 e Q4 da AT4 foram apresentados os valores e os termos corretos para cada situação. Já na Q5 da AT2, Q9 e Q11 da AT3 os alunos descreveram os conceitos de forma correta.

O aluno A7 não assimilou organizador prévio na AT2 Q5, pois respondendo que "*a área da hipotenusa é igual a soma dos números ao quadrado*", nota-se que ele utilizou termos incorretos. Já na Q4 da AT4, os alunos A3, A7, A12, A16, A17 também não demonstraram os organizadores prévios, pois apresentaram respostas como "*todo valor de π é aproximado*" (A3), "*que pegando objetos maiores ou menos nós chegaremos sempre perto do número π*" (A12), ou seja, não apresentaram respostas adequadas ao que lhes foram solicitados na questão.

Contudo, podemos concluir que diante dos dados analisados pela subcategoria Subsunçores e, especificamente com relação aos organizadores prévios, a quantidade de alunos que demonstrou ter assimilado os conhecimentos foi maior do que os que não assimilaram o que mostra a eficiência da SD no que tange ao fomento de organizadores prévios, como mostra o Quadro 41.

Quadro 41 – Dados quantitativos das unidades referentes à subcategoria Organizadores Prévios.

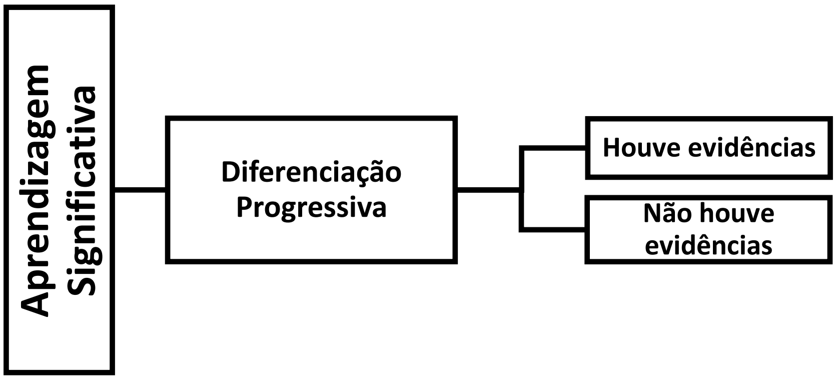
	Assimilou os organizadores prévios	Não assimilou os organizadores prévios
AT2: Q4a	19	0
AT2: Q4b	19	0
AT2: Q5	18	1
AT2: Q6	19	0
AT3: Q1a	19	0
AT3: Q1b	19	0
AT3: Q1c	19	0
AT3: Q1d	19	0
AT3: Q5	19	0
AT3: Q9	19	0
AT3: Q11	19	0
AT4: Q4	14	5
TOTAL	**222**	**6**
%	**97%**	**3%**

Fonte: Os autores (2018).

4.2.3.3 Subcategoria – Diferenciação Progressiva

Nesta subcategoria foram analisadas as diferenciações progressivas realizadas na SD pelos alunos, sendo este um processo importante na Teoria da Aprendizagem Significativa. Para isto foram elencadas as unidades "houve evidências" e "não houve evidências".

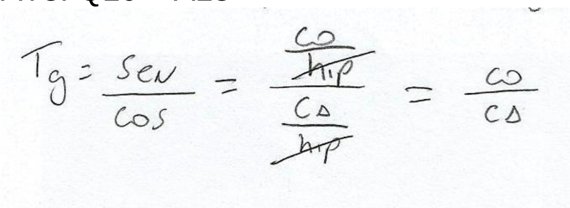
Figura 53 - Categoria Aprendizagem Significativa, subcategoria Diferenciação progressiva e unidades prévias.

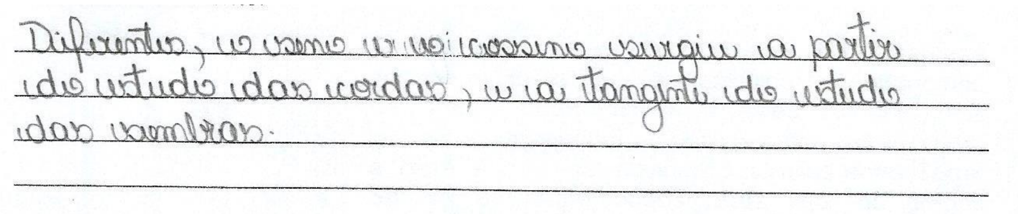


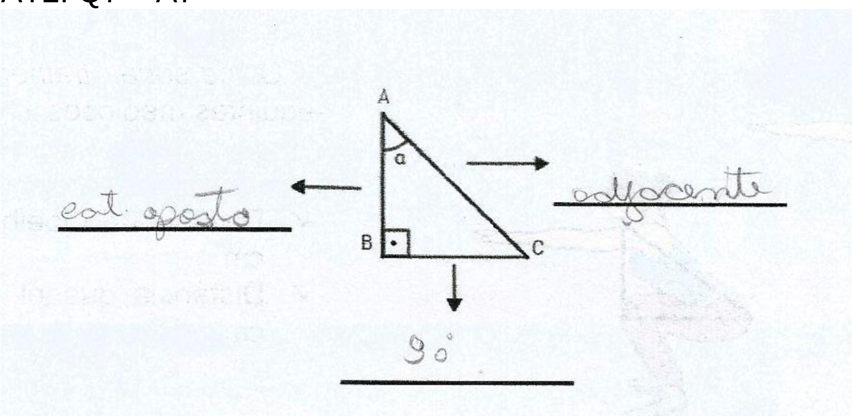
Fonte: Os autores (2018).

Ao analisar os dados verificamos que as duas unidades prévias foram efetivadas, como pode ser observado no Quadro 42.

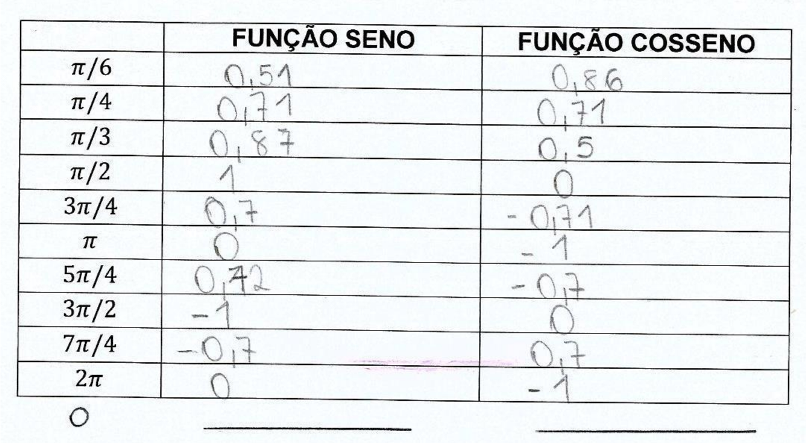
Quadro 42 - Categoria Aprendizagem Significativa, subcategoria Diferenciação Progressiva e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

<table>
<tr><td>Houve evidências: os alunos apresentaram respostas adequadas as questões.</td></tr>
<tr><td>AT3: Q10 – A13


AT3: RF1 – A14


</td></tr>
<tr><td>Síntese descritiva: os subsunçores dos alunos foram modificados durante a realização das atividades, havendo uma complementação de conhecimento na estrutura cognitiva.</td></tr>
<tr><td>Não houve evidências: os alunos não apresentaram respostas adequadas as questões.</td></tr>
<tr><td>AT2: Q7 – A7


AT5: Q1 – A2</td></tr>
</table>



	FUNÇÃO SENO	FUNÇÃO COSSENO
$\pi/6$	0,51	0,86
$\pi/4$	0,71	0,71
$\pi/3$	0,87	0,5
$\pi/2$	1	0
$3\pi/4$	0,7	- 0,71
π	0	- 1
$5\pi/4$	0,72	- 0,7
$3\pi/2$	- 1	0
$7\pi/4$	- 0,7	0,7
2π	0	- 1
O		

Síntese descritiva: os alunos continuaram com um raciocínio semelhante ao que tinham como foi apresentado na AT1, não havendo modificações ou evoluções na compreensão do conteúdo, como no caso do A7. E casos de que não souberam diferenciar algumas representações das Funções Trigonométricas no ciclo trigonométrico, como na AT5 Q1, pois inverteram os valores das funções seno e cosseno.

Fonte: Os autores (2018).

Este processo de diferenciação progressiva, Ausubel (2003) coloca como o princípio pelo qual os conceitos mais gerais e inclusivos do conteúdo de ensino devem ser apresentados no início da instrução, e progressivamente, diferenciando em termos de especificidades. Estes foram os critérios analisados por esta subcategoria.

Diante dos dados analisados podemos verificar que na AT2 Q7 e Q8, 90% dos alunos identificaram quais lados do triângulo retângulo são catetos e hipotenusa e os significados de cada um, e apenas 10% dos alunos (dois alunos) (A7 e A16) identificaram de forma incorreta os lados correspondentes. Relacionando as respostas adequadas dos alunos para estas questões com a Q4 da AT1, analisadas na subcategoria Subsunçores, podemos constatar que os subsunçores dos alunos foram modificados, pois conseguiram diferenciar os lados de um triângulo retângulo aprimorando assim os conhecimentos sobre triângulos retângulos, e isso, caracteriza a existência da diferenciação progressiva.

Nas AT2 Q9, AT3 Q3, Q4, Q8 e Q13 100% dos alunos resolveram as questões de acordo com os conceitos adequados, identificando assim que os alunos aprimoraram seus subsunçores sobre Teorema de Pitágoras e razões trigonométricas, em comparação com as questões Q5 e Q6 da AT1, na qual, com relação a essas duas questões, 90% dos alunos não souberam responder adequadamente, mesmo sendo informado o conceito a se usar.

Na AT3 Q10 também houve evidências da diferenciação, pois 100% dos alunos souberam diferenciar a razão tangente das razões seno e cosseno estudados anteriormente, considerando a hierarquia do conhecimento, pois demonstraram saber que a razão tangente foi definida a partir das razões seno e cosseno. Com esta mesma finalidade foi analisada a questão RF1 da AT3 que eram para identificar as diferenças entre as razões em contexto histórico, e foi constatado que novamente, 100% dos alunos, compreenderam essas diferenças. E nas Q1 e Q2 da AT5, 73% dos alunos diferenciaram as funções seno e cosseno no ciclo trigonométrico e 100% dos alunos evidenciaram a localização da função tangente no ciclo trigonométrico. E para a Q1 (a, b, c, d, e, f) da AT6, aproximadamente, 70% dos alunos demostraram evidências de que souberam diferenciar as Funções Trigonométricas no gráfico, e os 30% restantes identificaram valores inadequados nas Funções Trigonométricas e confundindo seno com cosseno, diferenciando de forma inadequada as especificidades das mesmas no ciclo trigonométrico.

Estes resultados nos permitem inferir que os subsunçores dos alunos foram aprimorados e evoluíram, pois passaram da Trigonometria do triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico e representações gráficas.

No Quadro 43 podemos observar quantitativamente a relação de alunos com as unidades, na qual confirmam que o processo de diferenciação progressiva foi evidenciado com sucesso.

Quadro 43 – Dados quantitativos das unidades referentes à subcategoria Diferenciação Progressiva.

	Houve evidências	**Não houve evidências**
AT2: Q7	17	2
AT2: Q8a	19	0
AT2: Q8b	19	0
AT2: Q8c	19	0
AT2: Q9	19	0
AT3: Q4	19	0
AT3: Q8	19	0
AT3: Q10	19	0
AT3: Q13	19	0
AT3: RF1	19	0
AT5: Q1	14	5
AT5: Q2	19	0
AT6: Q1a	18	1
AT6: Q1b	15	4

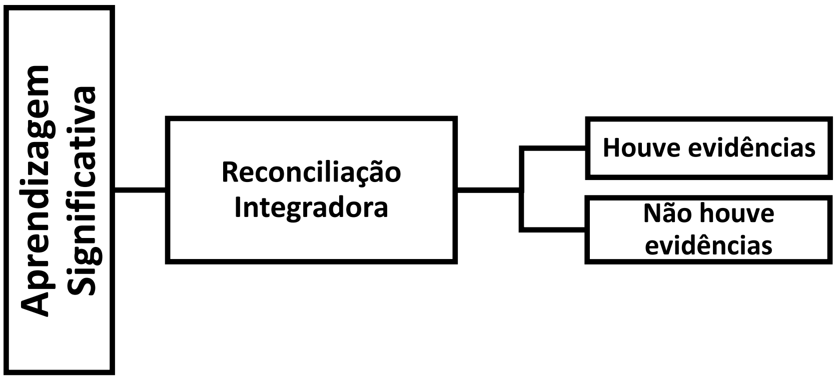
AT6: Q1c	12	7
AT6: Q1d	16	3
AT6: Q1e	19	0
AT6: Q1f	0	19
TOTAL	**301**	**41**
%	**88%**	**12%**

Fonte: Os autores (2018).

4.2.3.4 Subcategoria – Reconciliação Integradora

Para esta subcategoria foram analisadas as reconciliações integradoras apresentadas pelos registros dos alunos, sendo este um processo também importante na Teoria da Aprendizagem Significativa. Para isto foram elencadas as unidades “houve evidências” e “não houve evidências”.

Figura 54 - Categoria Aprendizagem Significativa, subcategoria Reconciliação Integradora e unidades prévias.



Fonte: Os autores (2018).

Ao analisar os dados verificamos que as duas unidades prévias foram efetivadas, como pode ser observado no Quadro 44.

Quadro 44 - Categoria Aprendizagem Significativa, subcategoria Reconciliação Integradora e unidades de análise com excertos e sínteses descritivas.

Houve evidências: os alunos apresentaram respostas adequadas as questões.
AT3: Q5 – A13

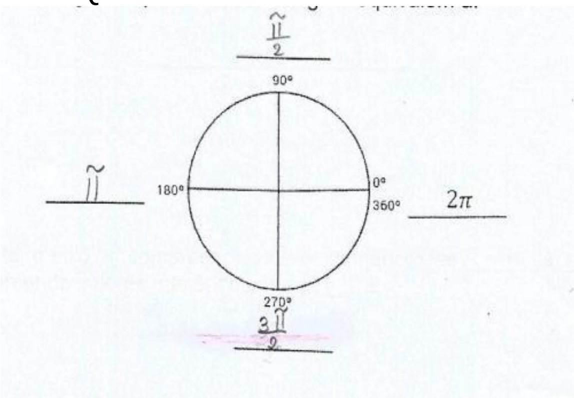
a) seno de 30º = cosseno de 60°

b) seno de 45º = cosseno de 45°

c) seno de 60º = cosseno de 30°

d) seno de 36º = cosseno de 54°

AT4: Q5 – A6



AT6: Q3a, b, c, d – A2

Coeficientes	Ocorreu	Componente da onda
A	alterou o eixo y	alterou a crista e o vale
B	alterou o eixo y	alterou a amplitude.
C	alterou o eixo x.	alterou a frequência.
D	alterou o eixo x.	interfere no início e no fim do som.

AT3: RF2 – A14

O seno, cosseno e a tangente são calculadas a partir de um triângulo retângulo e precisam de um ângulo, mas as diferenças é que o seno calcula o cateto oposto, o cosseno calcula o cateto adjacente, e a tangente calcula a hipotenusa.

Síntese descritiva: os alunos souberam evidenciar as semelhanças e diferenças entre os conceitos, integrando-os, como no caso dos conceitos de seno e cosseno. E na questão RF2, os alunos souberam estabelecer diferenças e semelhanças entre os conceitos apresentados para seno, cosseno e tangente.

Não houve evidências: os alunos não apresentaram respostas adequadas as questões.

AT5: Q1 – A 10

	FUNÇÃO SENO	FUNÇÃO COSSENO
$\pi/6$	0,51	0,86
$\pi/4$	0,71	0,71
$\pi/3$	0,87	0,86
$\pi/2$	1	0
$3\pi/4$	0,7	-0,7
π	0	-1
$5\pi/4$	-0,7	-0,72
$3\pi/2$	0	-1
$7\pi/4$	-0,7	-0,7
2π	0	1
0	0	1

Síntese descritiva: os alunos não estabeleceram diferenças e semelhanças entre os conceitos, confundiram os valores das funções e/ou representaram de forma inadequada os radianos no ciclo trigonométrico.

Fonte: Os autores (2018).

Moreira (2012, p. 7) coloca:

> Quando aprendemos de maneira significativa temos que progressivamente diferenciar significados dos novos conhecimentos adquiridos a fim de perceber diferenças entre eles, mas é preciso também proceder a reconciliação integradora. Se apenas diferenciarmos cada vez mais os significados, acabaremos por perceber tudo diferente. Se somente integrarmos os significados indefinidamente, terminaremos percebendo tudo igual.

Diante disso, como Moreira (2012) ainda coloca, que os processos de diferenciação e reconciliação devem ser simultâneos, integrando os significados, e ao reconciliar o conhecimento é necessário que aponte as diferenças e semelhanças para que este seja um processo facilitador de aprendizagem como é definido na Teoria da Aprendizagem Significativa.

Portanto, foi analisado se houve ou não evidência de reconciliação integrativa na AT3 Q5 e Q6, entre os conceitos seno e cosseno, pois historicamente cosseno surgiu a partir de seno. E constatou-se que 100% evidenciaram a reconciliação integradora, pois resolveram estas questões definindo cosseno a partir do seno, mas também atribuindo valores diferentes aos mesmos, estabelecendo assim as diferenças e semelhanças entre as razões.

Para as questões Q5 e Q6 da AT4 os alunos estabeleceram as semelhanças entre as unidades graus e radianos, de forma que identificassem que pode ser representado por uma ou outra unidade, estabelecendo assim reconciliação integradora entre este conteúdo. Apenas dois alunos (A7 e A10) foram caracterizados pela unidade “não houve evidências” a reconciliação integradora, visto que utilizaram de termos inadequados e/ou não concluíram a resolução, portanto, para estas questões 90% evidenciaram reconciliação integradora.

Com relação às representações no ciclo trigonométrico na Q1 da AT5, 74% dos alunos identificaram as Funções seno e cosseno nos eixos de modo adequado, fato que caracteriza a ocorrência da reconciliação integradora entre essas funções no mesmo ciclo trigonométrico. Porém, 26% dos alunos (A2, A7, A11, A13 e A16) confundiram as funções seno e cosseno.

Sobre a questão RF2 da AT3 verificou-se que 90% dos alunos souberam descrever semelhanças e diferenças adequadas aos conceitos de seno, cosseno e tangente, além de calcular corretamente suas razões e compreender as semelhanças e diferenças existentes entre essas funções.

Na AT6 Q3 (a, b, c, d) verificou-se que houve a reconciliação entre o comportamento da função e os componentes das ondas sonoras quando os coeficientes das funções eram modificados por 100% dos alunos. Uns alunos especificaram melhor as alterações que outros, porém todos evidenciaram as alterações no comportamento das funções.

Consideramos que a partir da análise realizada, é possível inferir que houve evidências significativas de reconciliação integradora dos alunos, pois 94% deles demonstraram evidências de reconciliação integradora nas questões da SD, sendo este um resultado satisfatório para esta subcategoria, como apresentado no Quadro 45.

Quadro 45 – Dados quantitativos das unidades referentes a subcategoria Reconciliação Integradora.

	Houve evidências	**Não houve evidências**
AT3: Q5	19	0
AT3: Q6	19	0
AT3: RF2	17	2
AT4: Q5	17	2
AT4: Q6	17	2
AT5: Q1	14	5
AT6: Q3a	19	0
AT6: Q3b	19	0
AT6: Q3c	19	0
AT6: Q3d	19	0
TOTAL	**179**	**11**

%	**94%**	**6%**

Fonte: Os autores (2018).

Contudo, os resultados apresentados por esta subcategoria de análise demonstram resultados satisfatórios a nossa pesquisa, visto que foram alcançados elementos que evidenciam a aprendizagem significativa dos alunos sobre o conteúdo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista que o objetivo geral desta pesquisa corresponde à investigar a elaboração de uma Sequência Didática, segundo a abordagem metodológica de ensino Histórico-Epistemológica das Funções Trigonométricas, com vistas a promover a aprendizagem significativa dos alunos do Ensino Médio, foram consideradas quatro fases fundamentais: a elaboração de uma fundamentação teórica, os encaminhamentos metodológicos adequados, a produção de um Produto Educacional (Sequência Didática Potencialmente Significativa) e a análise dos dados oriundos do mesmo.

A elaboração da Sequência Didática Potencialmente Significativa teve início a partir da realização de uma reconstrução histórica a respeito da Trigonometria. Contudo, buscou-se identificar como o conhecimento foi construído por meio da abordagem de ensino Histórico-Epistemológica. A abordagem adotada foi culminante para esta pesquisa, diante do objetivo de proporcionar aos alunos compreensão das origens do conhecimento, os porquês de estudá-lo e a relação entre as situações de aplicação na antiguidade e atualidade. Esses aspectos foram ressaltados na elaboração da Sequência Didática, de modo que os alunos puderam construir o conhecimento, sendo esta uma característica importante desta pesquisa, ou seja, os conhecimentos não foram "dados" aos alunos como algo pronto e sem explicação, eles foram construídos por meio da compreensão do trajeto de seu desenvolvimento.

Outros aspectos que contribuíram para a elaboração do Produto Educacional foram o encaminhamento metodológico de pesquisa e o encaminhamento metodológico de desenvolvimento da Sequência Didática Potencialmente Significativa. A utilização de uma pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico foi fundamental para realização deste trabalho, visto que os pesquisadores tiveram o papel de observar, coletar e interpretar os dados coletados para o desenvolvimento da pesquisa, visando alcançar a assimilação de todas as fases que a pesquisa exige. Além disso, a estrutura utilizada na Sequência Didática possibilitou organizar da melhor forma possível os conteúdos/questões.

Em relação à metodologia para análise dos dados, a Análise Textual Discursiva possibilitou, por meio das categorias, subcategorias e unidades, verificar se houve uma aprendizagem significativa do conteúdo de acordo com a metodologia de ensino Histórico-Epistemológica. Diante dos resultados apresentados, as respostas satisfatórias sobressaíram em relação as respostas insatisfatórias, o que evidencia uma aprendizagem significativa dos alunos.

Levando em consideração que o Produto Educacional desta pesquisa foi elaborado de forma que pudesse ser viável sua utilização em sala de aula, foram definidos objetivos a serem alcançados por cada questão de cada atividade da Sequência Didática, além de orientações para sua a aplicação. De qualquer forma, vale ressaltar que ao elaborar e aplicar um Produto Educacional como o proposto, isso requer do professor aperfeiçoar sua prática docente, diversificar suas metodologias de ensino, além de planejar e pesquisar novos caminhos para o ensino. Esta Sequência Didática, em particular, relacionou a metodologia Histórico-Epistemológica, Resolução de Problemas e Recursos Tecnológicos, encaminhamentos estes que facilitaram a compreensão dos alunos e a prática docente. Neste sentido, mediante a Resolução de Problemas os alunos evidenciaram o conteúdo em seu dia a dia por meio de situações problemas; com o uso dos Recursos Tecnológicos (software GeoGebra) o professor pôde demonstrar várias representações de Funções Trigonométricas, possibilitando assim exatidão nas representações com benefícios de aulas mais dinâmicas comparadas às tradicionais com quadro e giz.

No que se refere aos dados obtidos após a elaboração e aplicação da Sequência Didática, observa-se que por meio de uma abordagem de ensino diferenciada os alunos puderam compreender melhor o conhecimento e se interessar por ele. Logo, a abordagem metodológica de ensino Histórico-Epistemológica despertou o interesse, a atenção, a participação e os questionamentos durante as aulas de Matemática, na qual o professor assumiu papel de mediador e orientador durante a aprendizagem dos alunos, os quais assumiram o papel principal na construção dos seus conhecimentos.

Outro aspecto que contribuiu para a aplicação da Sequência Didática foi o momento de reflexão dos alunos sobre o que foi estudado. Isso potencializa a capacidade crítica dos alunos a refletirem a respeito do que foi e o que não foi válido, podendo assim sugerir melhorias e/ou destacarem suas dúvidas. Diante das reflexões descritas pelos alunos e, com base em nossas reflexões, foram feitas melhorias na Sequência Didática após a aplicação, a fim de tornar mais compreensível e didático aos alunos.

De acordo com o apresentado no capítulo 4, a primeira atividade da Sequência Didática procurou identificar os subsunçores dos alunos, visto que já haviam estudado a Trigonometria no triângulo retângulo. Porém, notou-se que a maioria não soube resolver as Questões. Deste modo, nas atividades seguintes trabalhamos com organizadores prévios a fim de que os alunos tomem conhecimentos da Trigonometria no triângulo retângulo e, posteriormente, possam avançar para o estudo das Funções Trigonométricas. Diante dos resultados apresentados podemos observar significativas evoluções, pois ao analisar as questões sobre os subsunçores e as questões sobre os organizadores prévios encontramos respostas satisfatórias em grande maioria dos alunos que participaram da aplicação.

A respeito dos conteúdos tratados nas atividades 4, 5 e 6, apesar de ser referente a um assunto novo, a maioria dos alunos apresentou resultados satisfatórios, de forma que souberam diferenciar progressivamente e reconciliar interativamente os conceitos históricos, as aplicações e as resoluções das Funções Trigonométricas dadas nas atividades, caracterizando assim a aprendizagem significativa deste conteúdo.

Isso posto, os resultados da pesquisa revelam uma análise favorável do trabalho desenvolvido, indicando elementos facilitadores e potencializadores para aprendizagem dos alunos. Deste modo, constatamos que a elaboração da Sequência Didática Potencialmente Significativa, segundo a abordagem metodológica de ensino Histórico-Epistemológica, promoveu a aprendizagem significativa dos alunos do Ensino Médio a respeito do conteúdo Funções Trigonométricas.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, David P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. 1 ed. Lisboa: Plátano, 2003.

AUSUBEL, David P.; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional**. Tradução de Eva Nick. 2 ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980. Tradução de Educational Psychology.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A Matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. 2 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BERNARDELLI, Marlize Spagolla. **A interdisciplinaridade na contextualização do conceito de transformação química em um curso de Ciências Biológicas.** 2014. 158 f. Tese (Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

BIBLIA. Português. **Bíblia Sagrada**. Nova Tradução na Linguagem de Hoje. Barueri-SP: Sociedade bíblica do Brasil, 2012.

BORSSOI, Adriana Helena. **Modelagem Matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais.** 2013. 256 f. Dissertação (Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**.Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 504 f., 2012.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEF): Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental, Brasília, MEC/SEF, 1998.

CELSO, Ana Berenice Pedroso Biazutti; FERREIRA, Francinildo Nobre. **TRIGONOMETRIA NO TRI ˆANGULO RET ˆANGULO: Uma Abordagem Prática para a Construçao de Conceitos**. 2013. 30 f. Dissertaçao (PROFMAT)— Universidade Federal de Sao Joao del-Rei-UFSJ, Sao José do Rei, Minas Gerais, 2013..

COSTA, Nielce Meneguel Lobo da .**Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador**. 1997. 250 f. Dissertação (Ensino da Matemática) – Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

D’AMBROSIO, U. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Ed.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, p. 97-115, 1999.

D'AMORE, Bruno. **Elementos da Didática da Matemática**. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. Disponível em: < https://www.livrebooks.com.br/livros/elementos-de-didatica-da-matematica-bruno-damore-mw0y2ewp7q0c/baixar-ebook> Acesso em: 20 dez. 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Unicamp, 843 f., 201.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5 ed. - São Paulo : Atlas, 2002.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, mar./abr. 1995. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/rae/v35n2/a08v35n2.pdf> Acesso em: 10 jan. 2018.

GOMES, Severino Carlos. **Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades para o ensino de Trigonometria numa abordagem histórica.** 2011. 90 f. Dissertação (Ensino de Ciências naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

KATZ, Victor J. **História da Matemática**. 2. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

KENNEDY, Edward. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.** São Paulo: Atual, 1992. 48 p.

KLINE, Morris. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. New York: Oxford University Press. 1972.

LUCAS, Lucken Bueno. **Contribuições axiológicas e epistemológicas ao ensino da teoria da evolução de Darwin.** 2010. 170 f. Dissertação (Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

LUCCAS, Simone. **Abordagem histórico-filosófica na Educação Matemática: apresentação de uma proposta pedagógica.** 2004.225 f. Dissertação (Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

LOPES, Lidiane Schimitz; ALVES, Antônio Maurício Medeiros. A História da Matemática em sala de aula: propostas de atividades para a Educação Básica. **ENCONTRO REGIONAL DE ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL, XX**, p. 320-330, nov. 2014.

LOPES, Lidiane Schimitz; FERREIRA, André Luis Andrejew. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. **Abakós**, v. 2, n. 1, p. 75-88, nov. 2013.

MACIEL, Willyans. **InfoEscola:** navegando e aprendendo. Disponível em: <http://www.infoescola.com>. Acesso em: 10 fev. 2017.

MATTHEWS, M. R. História, filosofia e ensino de ciências: a tendência atual de reaproximação. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 12, n. 3, p. 164-214, 1995.

MENDES, Iran Abreu. **Ensino de trigonometria através de atividades históricas.** 1997. 216 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 1997.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **História da Matemática: propostas e desafios**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MIGUEL, Antonio. **Três estudos sobre história e educação Matemática**. 1993. 361 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação Departamento de Metodologia de Ensino Campinas, 1993.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise Textual Discursiva**. 2. ed. Ijuí; Unijuí, 2014.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. A storm of light: comprehension made possible by discursive textual analysis. **Ciência e Educação,** Bauru, v.9, n.2, 191-211, out. 2003.

MOREIRA, Antonio. Al Final, Qué es Aprendizaje Significativo?. **Qurriculum**, La Laguna, n. 25, p. 29-56, mar. 2012.
MOREIRA, Marco Antonio. Aprendizagem Significativa; um conceito subjacente. **Aprendizagem Significativa em Revista**, Brasília, v. 1, n. 3, p. 25-46, 2011.

MOREY, Bernardete. Geometria e Trigonometria na índia e nos Países Árabes. Coleção História da Matemática, 2003.

MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie F.Salzano. **Aprendizagem significativa**: a Teoria de David Ausubel. 2 ed, São Paulo: Centauro, 2016.

NASCIMENTO, Alessandra Zeman do. **Uma sequência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica.** 2005. 228 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

OLIVEIRA, Carlos André Carneiro de. **Trigonometria: os radianos e as funções seno, cosseno e tangente.** 2014. 77 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática -CCT – UFCG) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2014.

OLIVEIRA, Juliana Elvira Mendes de. **A Trigonometria na Educação Básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas.** 2013. 134 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação do mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática**, SEED, Curitiba: 2008.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Caderno de Expectativas de Aprendizagem.** SEED: Curitiba, 2012.

PEREIRA, Ana Carolina; MOREY, Bernadete Barbosa. Um ensaio sobre a história da trigonometria antes do século XV. **Conexões - Ciência e tecnologia**, Fortaleza, v. 9, n. 4, p. 143-152, 2015, dez. 2015.

PINHEIRO, Rafael Marques. **Sistema de numeração à luz da abordagem histórico – epistemológica.** 2016. 118 f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procópio, 2016.

QUINTANEIRO, Wllerson; GIRALDO, Victor; PINTO, Márcia Fusaro. De onde vem a unidade radiano e por que seu uso é necessário. In: Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro (EEMAT), 2010, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: EEMAT, 2010. p. 1-11.

SAMPAIO, Helenara Regina. **Uma abordagem histórico-filosófica na Educação Matemática: contribuições ao processo de aprendizagem de trigonometria no Ensino Médio.** 2008. 190 f. Dissertação (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SCOTT, J. F. **A HISTORY OF MATHEMATICS:** From Antiquity to the Beginning of the nineteenth century. London: Taylor & Francis LTD, 1969.

SOUZA, Thuysa Schlichting de. **Um Estudo da Extensão do seno, cosseno e tangente no Triângulo Retângulo para Funções de Domínio Real.** 2013. 54 f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

TEIXEIRA, Claudia Francisco Pelati. **O ensino de juros simples e compostos à luz da tecnologia do *software calc***. 2017. 119 f. Dissertação (Mestrado em Ensino) – Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procópio, 2017.

ZABALA, A. **A prática Educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA MENORES DE IDADE

Gostaríamos de obter o seu consentimento para o(a) menor ____ participar como voluntário(a) da pesquisa intitulada: **Funções Trigonométricas: produção de uma sequência potencialmente significativa à luz da abordagem histórico-epistemológica**, referente ao Trabalho de Conclusão de Curso do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná, Campus Cornélio Procópio.

A forma de participação consiste na realização de atividades propostas pelas pesquisadoras no período matutino nas aulas da disciplina de Matemática.

O nome do(a) aluno(a) não será utilizado em qualquer fase da pesquisa, o que garante o anonimato. A divulgação dos resultados será de forma a não identificar os(as) voluntários(as).

Mesmo depois de consentir com a participação do(a) menor, você pode desistir da continuação da participação do mesmo, ou seja, você tem o direito e a liberdade de retirar seu consentimento em qualquer fase da pesquisa, seja antes ou depois da coleta de dados, independente do motivo e sem nenhum prejuízo ao aluno(a).

Você não terá despesa alguma e, também não receberá remuneração alguma.

Desde já agradecemos a atenção e a participação e colocamo-nos à disposição para maiores informações.

Em caso de dúvidas ou informações, entre em contato com os pesquisadores nos endereços eletrônicos: profrebeccalourenco@gmail.com, williamjn@ufpr.br ou simoneluccas@uenp.edu.br.

Eu, ____ (nome do responsável ou representante legal), portador do RG nº _____________________, confirmo que os pesquisadores Profª. Rebecca Lourenço, Profª Dr. William Junior do Nascimento e Profª Dr. Simone Luccas explicaram-me os objetivos desta pesquisa, bem como a forma de participação do(a) menor. Eu li e compreendi este Termo de Consentimento, portanto, eu concordo em dar meu consentimento para que o(a) menor participe como voluntário(a) desta pesquisa.

_____________, ___/____/2017

____

Assinatura do responsável ou representante legal.

APÊNDICE B

TERMO DE ASSENTIMENTO

Eu, ____, concordo em participar como voluntário (a) da pesquisa intitulada **Funções Trigonométricas: produção de uma sequência potencialmente significativa à luz da abordagem histórico-epistemológica**, realizada pelos pesquisadores Profª. Rebecca Lourenço, Profº. Dr. William Junior do Nascimento e Profª. Dr. Simone Luccas, referente ao Trabalho de Conclusão de Curso do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná, Campus Cornélio Procópio, desde que seja garantido meu anonimato nas publicações e divulgações dos resultados desta pesquisa.

____
Assinatura do(a) aluno(a)

Assinatura dos Pesquisadores responsáveis:

____
Rebecca Lourenço
Pesquisadora

____
William Junior do Nascimento
Orientador

____
Simone Luccas
Coorientadora

______________, ___/___/2017